PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. | 1. Oktober 1919. | 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 21 am 18. Oktober 1919.

INHALT:

Originalmitteilungen:
J. Popper-Lynkeus u. H. Löwy, Eine elektrodynamische Methode zur Erforschnng des Erdinnern. (Vierte Mitteilung.) Der Höhenregulator. S. 433.
H. Witte, Über den Sehraum. Siebente Mitteilung: Versuch, die Sehfernen zu bestimmen. S. 439.
O. Meißner, Kolorimetrische Untersuchungen. IV. S. 443.
H. Schmidt, Notiz über eine besondere Klasse von Determinanten und ihre Anwendung bei Stabilitätsstudien an Atommodellen. S. 446.
H. Schmidt, Gleichgewichts- und Stabilitätsstudien am Haasschen Modell des positiven Kerns der Atome. S. 448.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
E. Schrödinger, Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung. (Fortsetzung.) S. 450.
Besprechungen:
H. Bechhold, Die Kolloide in Biologie und Medizin. S. 455.
Personalien. S. 456.
Angebote. S. 456.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine elektrodynamische Methode zur Erforschung des Erdinnern.

(Vierte Mitteilung.)

Der Höhenregulator.

Von Josef Popper-Lynkeus und Heinrich Löwy.

Will man ein größeres Gebiet systematisch mit Hilfe der Kapazitäts- und Dämpfungsmethode erforschen, so kommt es darauf an, die Meßinstrumente möglichst rasch an viele, weit auseinander liegende Orte zu schaffen. In Wüsten und unwegsamen Landstrichen bedeutet das eine wesentliche Schwierigkeit und es liegt nahe, sie durch Benutzung von Luftschiffen oder Flugzeugen zu überwinden. Hier erhebt sich aber eine neue Schwierigkeit. Man kann natürlich nicht wagen, irgendwo mitten in einer Wüste zu landen. Man muß also die Messung im Fluge vornehmen. Das Luftschiff muß sich — an den zu untersuchenden Stellen — bis nahe an den Boden herabsenken und in möglichst konstantem Abstand darüber hinwegfliegen. Zu diesem Zweck muß an dem Höhensteuer ein Regulator angebracht werden, der bewirkt, daß bei jeder noch so kleinen Änderung der Bodendistanz das Steuer im entgegengesetzten Sinne betätigt wird.

Die Messung im Fluge hat — außer der Vermeidung der Abflug- und Landungsschwierigkeiten — den Vorteil, daß die für die einzelne Messung erforderliche Zeit auf ein Minimum gebracht wird. Gebiete von ungeheurer Ausdehnung könnten in kurzer Zeit erforscht werden. Mit drei Luftschiffhallen: in Kairo, Tripolis und Marokko könnte man — bei einem Aktionsradius von 1000 km — die nordafrikanischen Wüsten (Sahara, Sandwüste Igidi, Libyen und das nördliche Numidien) sowie einen großen Teil Arabiens, ganz Syrien und das westliche Mesopotamien bis Kleinasien beherrschen.

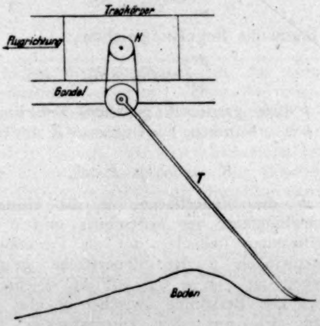

Fig. 1.

Fig. 1 stellt die Wirkungsweise des Höhenregulators in rein schematischer Weise dar, und zwar an dem Beispiel eines Lenkballons, bei dem die Höhensteuerflächen — wie bei dem Luftschiff „Le Temps" der Zodiac-Gesellschaft — mitten über der Gondel angebracht sind. H ist die Achse des Höhenruders, T ein skiartiges Tastorgan, das — bei Annäherung an den Erdboden — ausgestreckt wird und während des Bodenfluges auf dem Boden schleift. Durch eine Kettenübertragung wirkt der Taster in der Weise auf das Höhensteuer, daß beim Aufdrücken auf den Erdboden ein Aufziehen, beim Abheben vom Boden ein Sinken bewirkt wird. In der Praxis wird man als Taster einen gespannten Draht benutzen, der zugleich als Zuleitung zur Erdantenne dient. Der Regulator kann bei verschiedenen Höhensteuersystemen

verwendet werden; im folgenden beschränken wir uns jedoch auf das dynamische Höhensteuer.

Soll der Regulator auf plötzliche Änderungen der Bodendistanz genügend rasch reagieren, so müssen Steuerflächen von ziemlicher Größe verwendet werden. Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Luftschiff die Höhenlage ohne Schrägstellung seiner Längsachse ändert; es sollen also sowohl vorn als hinten Höhensteuer vorhanden sein, die beide mit dem Regulator verbunden sind. Das Wesentliche ist nun, daß die an dem Höhensteuer angreifende Luftkraft K von dem Abstand des Luftschiffs vom Boden abhängt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{z}$ den Abstand des Luftschiffs von einer als Normalniveau angenommenen Horizontalebene (Abszisse in der Fig. 2), mit h den Abstand der Erdoberfläche von diesem Normalniveau, so ist also K eine Funktion von $\mathfrak{z}-h$. Bezeichnen wir die Masse des Luftschiffs mit m und setzen

$$\frac{K}{m}=f(\mathfrak{z}-h),$$

so lautet die Regulatorgleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}=f(\mathfrak{z}-h), \tag{1}$$

wo f eine graphisch gegebene Funktion von $\mathfrak{z}-h$ ist. Nämlich: Die Luftkraft K am Höhensteuer ist

$$K=c(\beta)\cdot\mu\cdot F\cdot w^2,$$

wo F die Steuerfläche, w die Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffs und c einen Koeffizienten bedeutet, der als Funktion des Anstellwinkels β der Steuerfläche graphisch gegeben ist. $\mu={}^1/_8$ ist die Dichte der Luft. Die Beziehung zwischen β und $\mathfrak{z}-h$ ergibt sich aus den kinematischen Eigen-

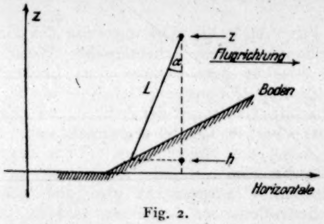

Fig. 2.

schaften des Regulators. Wir nehmen an, daß der Taster L (Fig. 2) in seiner Normallage ($K=0$) einen Winkel $\alpha=45^0$ mit der Lotrechten einschließt. Für $\alpha=45^0$ soll also $\beta=0$ sein. Fixieren wir ferner das Übersetzungsverhältnis der beiden Kettenräder (etwa zu 1 : 1), so haben wir jedem Werte von β einen bestimmten Wert von α zugeordnet, und kennen, da $L\cos\alpha=\mathfrak{z}-h$ ist, auch die Beziehung zwischen β und $\mathfrak{z}-h$. Genau genommen ist β der Winkel zwischen der Steuerfläche und der Horizontalebene und ist beim Traversieren des Luftschiffes $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\neq 0\right)$ vom Anstellwinkel γ

$$\gamma=\beta-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{w}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$$

verschieden. Um diese Differenz zu kompensieren muß man das Übersetzungsverhältnis und das Steuerungsintervall (über den Bereich konstanter Steuerwirkung hinaus) vergrößern.

Für den „Zeppelin I" ist die Fläche des vorderen und hinteren Höhensteuerpaares $F=44\ \mathrm{m}^2$, die maximale Horizontalgeschwindigkeit $w=15$ m/sec, das Gewicht 13000 kg, die Masse $m=\frac{13000}{9,8}=1326$, also $\frac{K}{m}=0,8\,c(\beta)$. In der Fig. 3 haben wir die Werte der Funktion $\frac{K}{m}=f(\mathfrak{z}-h)$, für einige Argumente $\mathfrak{z}-h$ berechnet. Die Funktion $c(\beta)$ haben wir den Veröffentlichungen der Göttinger Versuchsanstalt entnommen. Als Seitenverhältnis der Steuerfläche wurde 1 : 3 angenommen. Als normale Distanz $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0$ des Luftschiffes vom Boden wurde $\mathfrak{z}_0=10$ m, also die Tasterlänge

$$L=\mathfrak{z}_0\cos 45^0=14,3\ \mathrm{m}$$

gewählt. Für $\mathfrak{z}-h<7,15$ bzw. $\mathfrak{z}-h>12,44$ hat die Funktion den konstanten Wert $f=+0,37$, bzw. $f=-0,37$. In der Fig. 3 haben wir die absoluten Beträge der Funktion aufgetragen, um die Symmetrie der Steuerwirkung besser hervortreten zu lassen. Die Regulatorwirkung ist um so intensiver, je schärfer das Minimum (für $\mathfrak{z}-h=\mathfrak{z}_0$) ausgeprägt ist. Durch geeignete Wahl des Übersetzungsverhältnisses kann man dieses Minimum beliebig verschärfen, doch wird man da nicht zu weit gehen, weil sonst die Regulatorwirkung ruckartig erfolgen und den Insassen des Luftschiffes unangenehm fühlbar würde.

Die Größe h ist als Funktion der Zeit t gegeben, sie gibt an, in welcher Weise der Abstand des unteren Tasterendes von dem Normalniveau (Abszissenachse in Fig. 2) sich während des Fluges verändert. Durch $h(t)$ wird also — bei gegebener Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffes — der speziellen Beschaffenheit des Bodenprofils Rechnung getragen. Auch der Einfluß von Vertikalböen kann durch passende Wahl der Funktion $h(t)$ berücksichtigt werden.

Über $h(t)$ wollen wir folgende Annahme machen: Das Luftschiff soll während des Fluges über vollkommen ebenem Terrain plötzlich in

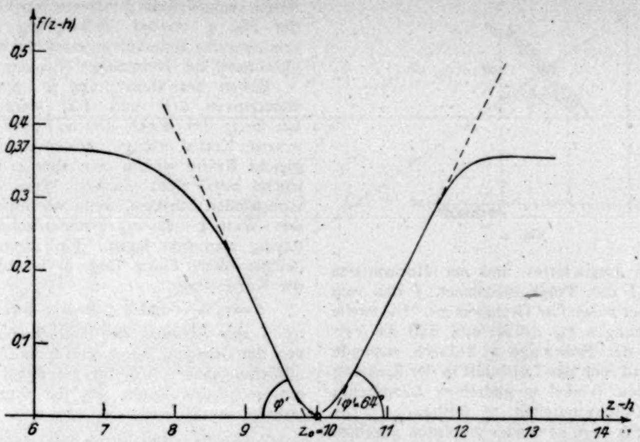

Fig. 3.

eine vertikal nach abwärts gerichtete Böe von der Geschwindigkeit v geraten, d. h. wir setzen: $h = vt$. Das entspricht dem Fall, daß das Luftschiff — bei vollkommener Windstille — auf eine Böschung von arc tg $\frac{v}{w}$ Graden stößt, falls w die Horizontalgeschwindigkeit des Luftschiffes ist.

Die Kraft am Höhensteuer muß so groß sein, daß das Luftschiff nie am Boden aufstößt, d. h. die Kurven $z(t)$ und $h(t)$ dürfen sich nirgends schneiden. Setzen wir für $f(z - h)$ den maximalen Wert $f_{max} = + 0{,}37$, so ergibt Gleichung (1)

$$z = \frac{f_{max}}{2} t^2 + z_0.$$

Diese Parabel wird von der Geraden $h = vt$ nicht geschnitten, wenn

$$f_{max} \geqq \frac{v^2}{2 z_0} \tag{2}$$

ist. Bei einer Vertikalböe von $v = 10$ m/sec Geschwindigkeit (entsprechend einem Böschungswinkel von 33°) und einer Normaldistanz $z_0 = 10$ m, ist also $f \geqq 5$, d. h. die Steuerfläche muß 5 : 0,37, d. h. wenigstens das 13fache der normalen Größe ($F = 44$ m²) betragen, um aus einer Höhe von 10 m über dem Boden Böen von 10 m/sec parieren zu können. Durch graphische Integration der Gleichung (1) kann man zeigen, daß dieses unter der Annahme $f(z - h) = f_{max}$ abgeleitete Resultat nahe an der wahren Lösung liegt.

Wir haben die Integration für die normal Steuerfläche ($F = 44$ m²), sowie für die 10-, 20- und 30mal so große durchgeführt: die gesuchte Lösung liegt zwischen 10 und 20. Alle Kurven, die einer kleineren Steuerfläche entsprechen, schneiden die Böschungslinie. Durch Vergrößerung des Übersetzungsverhältnisses kann man übrigens dem Fall $f = f_{max}$ beliebig nahe kommen.

Die Vergrößerung der Steuerfläche läßt sich durch Anbringung von Zusatzhöhensteuern vornehmen, die erst während des Bodenfluges — zugleich mit dem Regulator — an das Normalsteuer geschaltet werden. Die Arbeit zur Betätigung des Steuers wird man durch sog. „Servo-Motoren" verrichten lassen, wie sie für Großflugzeuge vorgeschlagen wurden[1]). Die Größe der Steuerfläche könnte übrigens durch andere Wahl des Seitenverhältnisses (z. B. 1 : 1,5) und Steuerungsintervalls ($0 \leqq \beta \leqq 40^0$) etwa um die Hälfte vermindert werden.

In der Praxis erfolgt die Höhenänderung des Luftschiffs durch Schrägstellung. An Stelle der Regulatorgleichung (1) treten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d^2\psi}{dt^2} &= f(z - h) \\ \frac{dz}{dt} &= w \sin\psi \end{aligned}\right| \tag{3}$$

für die beiden Unbekannten $\psi(t)$ und $z(t)$. ψ bedeutet den Winkel zwischen der Längs-

1) R. v. Mises „Fluglehre". Berlin, Springer 1918, S. 144.

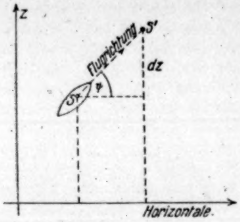

Fig. 4.

achse des Luftschiffes und der Horizontalen (Fig. 4), J das Trägheitsmoment, f das vom Höhensteuer ausgeübte Drehmoment. Die zweite der Gleichungen (3) drückt aus, daß die Veränderung der Höhenlage z dadurch zustande kommt, daß sich das Luftschiff in der Richtung der um den Winkel ψ gedrehten Längsachse mit der Geschwindigkeit w fortbewegt. Die Funktion $f(z-h)$ ist wieder graphisch gegeben. Die Auflösung ist auf graphischem Wege durchzuführen, oder aber man begnügt sich, wie zuvor, die Gleichungen für konstantes $f = f_{max}$ zu integrieren.

Auf eine andere Auffassung der Steuerwirkung macht uns Herr Prof. v. Mises aufmerksam: Durch die Schrägstellung des Luftschiffes tritt eine vertikale Komponente des Propellerzuges S auf; es wäre also hiernach:

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d^2\psi}{dt^2} &= f(z-h) \\ m\frac{d^2 z}{dt^2} &= S\sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

In Wirklichkeit sind natürlich beide Ursachen wirksam und superponieren sich. Für die Konstruktion des Luftschiffs ergibt sich aus (3) bzw. (3') die Forderung, die Größen

$$\frac{f\cdot w}{J} \text{ bzw. } \frac{f\cdot S}{m\cdot J}$$

möglichst groß zu machen.

Die (angenäherte) Symmetrie der Steuerwirkung (Fig. 3) wurde durch die besondere Wahl der kinematischen Eigenschaften des Regulators erzielt, nämlich durch den Umstand, daß wir für die Normalstellung des Tasters $\alpha = 45^0$ und das Übersetzungsverhältnis der Kettenräder gleich 1 : 1 gewählt haben. Man könnte leicht auf die Meinung kommen, daß im Gegenteil die Kraftverteilung asymmetrisch zu wählen sei, da doch der Ausgangspunkt $z_0 = +10$ m auf der positiven z-Achse liegt. Das ist aber nicht richtig. Nämlich: In der z-t-Ebene werden symmetrisch zur Geraden $z = z_0$ liegende Bahnkurven as und $a\bar{s}$ (Fig. 5) durch symmetrische Kraftverteilungen nach Art der Fig. 3 erzeugt (Behauptung I). Solche symmetrische Bahnkurven erreichen aber immer gleichzeitig die Normallage (Behauptung II).

Beweis der Behauptung I. Symmetrische Bahnkurven $s(t)$ und $\bar{s}(t)$ werden gemäß Gleichung (1) durch gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte erzeugt. Solche entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken nun aber in der Tat in irgend zwei, dem gleichen Wert von t entsprechenden Punkten, wenn wir irgendeine um den Wert $z - h = z_0$ symmetrische Kraftverteilung zugrunde legen. Für irgendeinen beliebigen Wert $t = \tau$ (Fig. 5) ist nämlich für die Kurve $s(t)$:

$$z = z_0 + i \text{ und } z - h = z_0 + (i - h),$$

wo i der Abstand des betrachteten Punktes von der Geraden, $z = z_0$ und h die Ordinate der „Böschungslinie" $h(t)$ für $t = \tau$ ist. Für den entsprechenden Punkt auf der symmetrischen Bahnkurve $\bar{s}(t)$ ist:

$$\bar{z} = z_0 - i \text{ und } \bar{z} - \bar{h} = z_0 - (i - h);$$

wo $\bar{h}$ die Ordinate der symmetrischen Böschungslinie $\bar{h}(t)$ für $t = \tau$ ist. Da bei symmetrischer Kraftverteilung für jedes beliebige z

$$f(z_0 + z) = -f(z_0 - z)$$

ist, so wirken also in den beiden Punkten tatsächlich entgegengesetzt gleiche Kräfte.

Beweis der Behauptung II. Die Bahnkurven erreichen die Normallage, wenn $z - h = z_0$ bzw. $\bar{z} - \bar{h} = z_0$ wird. Nun ist

$$z = \frac{f}{2}t^2 + z_0 \text{ und } h = vt$$

und

$$\bar{z} = -\frac{f}{2}t^2 + z_0 \text{ und } \bar{h} = -vt.$$

Wie man sieht, erreichen beide Kurven zur gleichen Zeit, nämlich für

$$t_{norm} = \frac{2v}{f} \qquad (4)$$

die Normallage.

Wir bemerken ferner, daß für beide Kurven ebenfalls gleichzeitig, nämlich für $t = \frac{t_{norm}}{2} = \frac{v}{f}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} \text{ und } \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d\bar{h}}{dt}$$

wird. Die beiden Kurven schlagen also gleichzeitig die zur Böschungsebene parallele Richtung ein. Im weiteren Verlauf wendet sich die eine Kurve $s(t)$ immer mehr von der zugehörigen Böschungslinie ab, während die symmetrische $\bar{s}(t)$ immer mehr auf ihre Böschungslinie zuläuft.

Das ist nun allerdings eine wesentliche und

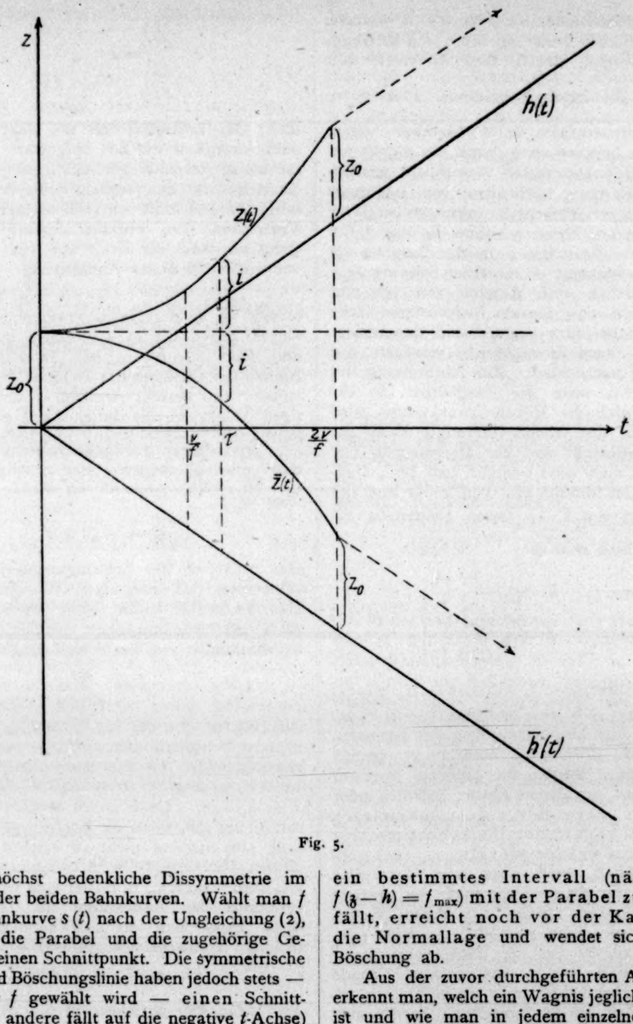

Fig. 5.

offenbar höchst bedenkliche Dissymmetrie im Verhalten der beiden Bahnkurven. Wählt man f für die Bahnkurve $s(t)$ nach der Ungleichung (2), so haben die Parabel und die zugehörige Gerade $h(t)$ keinen Schnittpunkt. Die symmetrische Parabel und Böschungslinie haben jedoch stets — wie immer f gewählt wird — einen Schnittpunkt (der andere fällt auf die negative t-Achse) für die Zeit

$$t_k = \frac{v}{f} + \sqrt{\frac{v^2}{f^2} + \frac{2\mathfrak{z}_0}{f}}. \qquad (5)$$

Glücklicherweise ist

$$t_k > t_{norm}, \qquad (6)$$

d. h. die Bahnkurve $\bar{s}(t)$, die ja nur für ein bestimmtes Intervall (nämlich wo $f(\mathfrak{z} - h) = f_{max}$) mit der Parabel zusammenfällt, erreicht noch vor der Katastrophe die Normallage und wendet sich von der Böschung ab.

Aus der zuvor durchgeführten Abschätzung erkennt man, welch ein Wagnis jegliche Landung ist und wie man in jedem einzelnen Fall auf den glücklichen Zufall angewiesen ist, daß nicht gerade eine Böe auftritt. Eine Landung mit einem Luftschiff ist sicher gefährlicher als ein Bodenflug, weil dort die dynamischen Vorsichtsmaßregeln versagen. Bei Flugzeugen wäre allerdings eine Sicherung der Landung durch einen Regulator denkbar; doch müßte die Luft-

kraft am Höhensteuer nicht von $\mathfrak{z} - h$, sondern von der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{z} - h$ abhängig gemacht werden, derart, daß für Werte von $\frac{d(\mathfrak{z} - h)}{dt}$, die einen Normalwert übersteigen, die Zusatzsteuerkräfte in Wirksamkeit treten. Das könnte beispielsweise durch ein elektromagnetisches Induktionsrelais verwirklicht werden.

Die noch übrig bleibenden, vom Regulator nicht beseitigten Höhenschwankungen sind für die elektrische Messung ohne Belang. Die Messung besteht nämlich in der Bestimmung der Eigenwellenlänge eines offenen Schwingungskreises, nämlich einer Antenne von 100 und mehr Meter Länge, die am rückwärtigen Teile der Gondel befestigt ist, während das andere Ende, mit einem Spanngewicht versehen, auf dem Boden nachschleift. Zur Ausbreitung des Gegengewichts wäre der Tragkörper zu benützen. Durch die Höhenschwankungen wird nun das an der Gondel befestigte Ende gehoben und gesenkt und der angrenzende Teil des Drahtes mehr oder weniger vom Boden abgehoben. Der Minimalwert von $\mathfrak{z} - h$ bzw. der Maximalwert von $\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}$ treten gleichzeitig für $t = \frac{v}{f}$ auf, und zwar ist

$$\left.\begin{aligned} \min(\mathfrak{z} - h) &= \mathfrak{z}_0 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{f} \\ \max(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}) &= \mathfrak{z}_0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{f}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

in unserem Beispiele ($\mathfrak{z}_0 = 10$, $v = 10$, $f = 5$) ist also $\min(\mathfrak{z} - h) = 0$ und $\max(\bar{\mathfrak{z}} - \bar{h}) = 20$, d. h. die größte Abweichung von der normalen Bodendistanz $\mathfrak{z}_0 = 10$ m beträgt in beiden Fällen 10 m. Würde die Antenne in ihrer ganzen Länge um diesen Betrag gehoben oder gesenkt, so wäre mit einem maximalen Fehler von 10 m in der Tiefenbestimmung eines Grundwasserspiegels zu rechnen. In Wirklichkeit wird aber nur das eine Drahtende gehoben und gesenkt, der größere Teil des Drahtes bleibt am Boden liegen, der Fehler wird also wesentlich geringer sein. Außerdem ist die Zeit der Höhenschwankung so kurz, daß schon aus diesem Grunde ein wesentlicher Fehler nicht zu befürchten ist. Die ganze Zeit bis zur Erreichung der Normallage dauert ja nach (4) für unser Beispiel ($v = 10$, $f = 5$) nur 4 Sekunden und kann — ebenso wie die maximale Höhenschwankung — durch Vergrößerung von f noch kleiner gemacht werden.

Das Luftschiff erreicht die Normallage mit der vertikalen Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)_{t_{\text{norm}}} &= +2v \\ \left(\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dt}\right)_{t_{\text{norm}}} &= -2v \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

d. h., das Luftschiff eilt mit doppelter Böengeschwindigkeit der Böe entgegen. Der Taster, der bis zu diesem Augenblick immer im gleichen Sinne gewirkt hat, erreicht seine Ausgangsstellung, die Luftkraft am Höhensteuer ändert ihr Vorzeichen. Im weiteren Verlauf der Bewegung schwankt die Kraft um Null herum und wir dürfen in erster Annäherung

$$f(\mathfrak{z} - h) = -(\mathfrak{z} - h - \mathfrak{z}_0)\operatorname{tg}\varphi \qquad (9)$$

setzen, wo φ der Neigungswinkel der $f(\mathfrak{z} - h)$-Kurve gegen die $(\mathfrak{z} - h)$-Achse in der Nähe der Stelle $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ ist. In Fig. 3 ist die Einheit der Ordinate das 10 fache der Abszisseneinheit, also besteht zwischen φ und dem dortigen Winkel φ' die Beziehung $\operatorname{tg}\varphi = 10 \operatorname{tg}\varphi'$. Setzen wir $\mathfrak{z} - h - \mathfrak{z}_0 = \zeta$ und berücksichtigen, daß $\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ wegen $\frac{d^2 h}{dt^2} = 0$, so geht Gl. (1) über in

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\zeta \cdot \operatorname{tg}\varphi. \qquad (10)$$

Das Auftreten der Schwingungsgleichung charakterisiert den stationären Bewegungszustand. Das Luftschiff führt beim Fortschreiten in einer zur Böschungslinie parallelen Richtung Schwingungen von der Schwingungsdauer T

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} \qquad (11)$$

aus (Fig. 5). In der Fig. 3 ist $f_{\max} = 0.37$, in unserem Beispiele hatten wir $f_{\max} = 13 \cdot 0{,}37 = 5$ gewählt. Also ist für unser Beispiel $\operatorname{tg}\varphi = 13 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}\varphi' = 130 \operatorname{tg} 64^0 = 266{,}5$, und $T = 0{,}38$ sec. Doch ist zu beachten, daß Ansatz (9) nur gilt, wenn die Kräfte $f(\mathfrak{z} - h) < f_{\max}$ sind, also nur bei nicht zu starken Böen. In diesem Fall hängt die Schwingungsdauer nur von dem Winkel φ, d. h. nur vom Übersetzungsverhältnis der Kettenräder ab. Für starke Böen kann man die Schwingungsdauer berechnen, indem man ausgehend von der Stelle $t = \frac{2v}{f}$ die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (8) bis an die Stelle fortsetzt, wo neuerdings $\mathfrak{z} - h = \mathfrak{z}_0$ wird. Dieser Zustand wird von beiden Bahnkurven $s(t)$ und $\bar{s}(t)$ zur selben Zeit $t = \frac{4v}{f}$ mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0$ erreicht. Das ist aber der Anfangszustand ($t = 0$), der ganze Vorgang wieder-

holt sich von hier ab periodisch. Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4v}{f}. \qquad (12)$$

In unserem Beispiel ($v = 10$, $f = 5$) wäre $T = 8$ sec, also wesentlich größer als der zuvor berechnete Wert für schwache Böen. Nun haben wir aber die extrem hohe Böengeschwindigkeit $v = 10$ m/sec unseren Berechnungen zugrundegelegt, um bei der Dimensionierung der Zusatzsteuerflächen möglichst sicher zu gehen. Bei einer Windgeschwindigkeit von 10 m/sec würde man aber mit einem Luftschiff überhaupt nicht fliegen. Es werden also viel geringere Werte von v — bei gleichbleibendem f —, also viel geringere Schwingungsdauern auftreten. Geometrisch gesprochen: Die Böschungslinien $h(t)$ und $\overline{h}(t)$ in Fig. 5 sind in Wirklichkeit — bei unveränderter Lage und Gestalt der Bahnkurven — stärker gegen die t-Achse gedreht: also wird die Normallage früher erreicht, d. h. die Schwingungsdauer vermindert. Zugleich vermindert sich auch die Schwingungsamplitude. Diese ist definiert durch den absoluten Betrag von:

$$\max\left\{\mathfrak{z}_0 - (\mathfrak{z} - h)\right\} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{f}. \qquad (13)$$

Zeichnen wir in dem Diagramm (Fig. 5) eine Schar von Bahnkurven entsprechend verschiedenen Werten von $f = f_{max}$, so können wir unmittelbar daraus ablesen, wie groß die Steuerfläche gemacht werden muß, damit — für eine vorgegebene maximale Böengeschwindigkeit — die Schwingungsamplitude einen bestimmten Wert nicht übersteigt. Unsere vorige Behauptung können wir kurz so aussprechen: Die Kraftverteilung ist symmetrisch zu wählen, weil symmetrische Bahnkurven die gleiche Schwingungsdauer haben.

Wien, Mai 1919.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Siebente Mitteilung: Versuch, die Sehfernen zu bestimmen.

1.

Der Laqueursche Sehraum[1]) zeigt, wie groß die Dinge im wahren Raum aussehen. Er nennt von den wahren Raummaßen die wahre Größe Y und die wahre Entfernung X, von den Sehmaßen nur die Sehgröße y. Wenn er beansprucht, mit diesen drei Zahlangaben das tatsächliche, bewußte Zahlerlebnis der Durchschnittsmenschen zu beschreiben, so hat er recht.

1) H. Witte, Über den Sehraum, sechste Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 389, 1919.

Dennoch befriedigt das Erreichte nicht ganz. Ich weiß mich mit meinem verehrten Freunde eins, wenn ich sage, der Laqueursche Sehraum treibt über sich selber hinaus. Man wünscht immer wieder, auch über Sehfernen x irgend etwas aussagen zu können. Man empfindet, erst durch diese Aussage werde das Gesamtbild abgeschlossen werden. Man hofft beides um so mehr, als es mit so verhältnismäßig einfachen Mitteln gelungen ist, den Laqueurschen Größensehraum zu fassen.

2.

Eins wird man außerdem noch hoffen: Nämlich, daß von da aus Licht auf die Grundschwierigkeit fallen werde, die früher[1]) mehrfach besprochen worden ist. Es handelt sich um die „Raumbedingung":

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{Sehferne}}{\text{Sehgröße}} &= \frac{\text{Wahre Entfernung}}{\text{Wahre Größe}}\\ \frac{x}{y} &= \frac{X}{Y}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

In der vorletzten Mitteilung wurde eingehend gezeigt, daß man nicht darauf rechnen kann, diese Raumbedingung zu erfüllen. Sie würde auf Grund der bekannten Sehgrößen y himmlischer Gebilde („Tellermond" usw.) einen unverständlich engen Sehraum fordern, von der Größenordnung höchstens 44 m für die äußerste Sehferne $(x)_{X=\infty}$.

Was damals auseinandergesetzt wurde, bleibt bestehen. Es scheint nach wie vor unmöglich, das menschliche Erleben in derart enge Sehfernen hineinpressen zu wollen. Es besteht nicht die geringste Aussicht, Sehfernen herauszudeuteln, die auch nur angenähert zu jenen winzigen Maßen passen. Aber was man erwarten darf, ist dies: daß man findet, wieviel — es wird vermutlich sehr viel sein! — die tatsächlichen Sehfernen von jenem unmöglichen Kleinstraum abweichen; vielleicht auch, warum.

3.

Da wir nicht an dem festen Leitband der Raumbedingung (1) in die gesuchten Tiefenabmessungen eindringen, sind wir anscheinend dies-

1) Vorläufige Mitteilung, diese Zeitschr. **19**, 142, 1918; zweite Mitteilung, ebenda **20**, 61, 1919; fünfte Mitteilung, ebenda **20**, 368, 1919.

mal wirklich genötigt, einzeln zu messen. Wir müssen, so scheint es, wirklich die fraglichen Sehfernen durch Ausmessen des ganzen Raumes vom Beobachter bis in die Unendlichkeit zahlenmäßig bestimmen, und müssen dann noch diese Messungen mit einer möglichst umfassenden Anzahl von Menschen wiederholen, um den Durchschnitt zu finden, um den sich die Sehfernen-Gesamtbilder der einzelnen Menschen verteilen.

Übrigens ist nicht nur dieser Durchschnitt für uns wichtig. Um alles zu übersehen, werden wir auch fragen müssen, welche Zahlen das Höchstmaß der vorkommenden Abweichung von dem besprochenen, unmöglichen Kleinstraum darstellen. Diese Frage nach dem denkbaren „Höchstraum" der tatsächlich vorkommenden Sehfernen-Gesamtbilder wollen wir besonders im Auge behalten.

4.

Wir gehen also ins Gelände und versuchen, die Sehfernen aller möglichen Dinge zu messen. Da zeigt sich nun, was nach dem früher Gesagten zu erwarten war. Es geht völlig anders als bei den Sehgrößen. Schon die Aussagen einer einzelnen Versuchsperson sind außerordentlich unsicher, schwanken hin und her und wollen sich durchaus nicht zu einer geordneten Gesamtheit zusammenschließen. Je mehr Versuchspersonen man hinzunimmt, umso schwankender, unsicherer, widerspruchsvoller wird das Bild.

Für die Frage: „Wie groß sieht der Kirchturm da hinten aus?" besitzt der Durchschnittsmensch sein Nähnadel- oder Finger-Maß. Für die Frage: „Wie weit entfernt sieht der Kirchturm aus?" besitzt er ein solches Maß unmittelbar nicht.

5.

Dennoch wird es uns gelingen, auch die Sehfernen zu fassen, und zwar genau wie die Sehgrößen mit einem Griff. Eine einzige Erfahrungstatsache, eine einzige Vernachlässigung liefert die Gesetze.

Die Tatsache ist dieselbe wie bei den Sehgrößen, und die Vernachlässigung ist dieselbe. Die Tatsache: daß gerade Linien angenähert als Gerade erscheinen. Die Vernachlässigung: daß wir sie als genau gerade ansehen wollen.

Wir gehen auf das Ergebnis des vorigen Aufsatzes zurück und wenden noch einmal dieselbe Tatsache und dieselbe Vernachlässigung an.

6.

Das zweite Gesetz des Laqueurschen Sehraums hieß

$$y = B \cdot \frac{E}{E+X}. \qquad (2)$$

Gegeben war ein fester Parallelstreifen $C\infty\, D\infty$ von der Breite $CD = B$, der sich vom Beobachter bis ins Unendliche erstreckt. Etwa ein Weg. Die Blickrichtung (mit einem Auge, dem linken) war die linke Parallele $C\infty$. Dann sagt Formel 2, wie klein (y) die Breite B des Parallelstreifens an jeder Stelle X aussieht. X ist die wahre Entfernung, $Y = B$ die wahre Größe, y die Sehgröße. E ist eine noch zu bestimmende Zahl, die Konstante des Laqueurschen Sehraums.

7.

Das Bild der Gleichung 2 ist eine gleichseitige Hyperbel. Das Aststück $D\infty$, welches die Sehgrößen darstellt, zeigt nochmals Fig. 1.

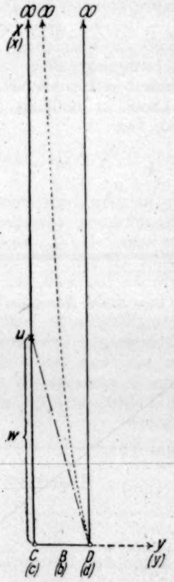

Fig. 1.

Dieses Hyperbelstück $D\infty$ sieht der Beobachter nicht. Wohl sind die Zahlen, von denen er weiß, die drei, welche die Hyperbelgleichung 2 miteinander verbindet: wahre Entfernung X, wahre Größe B, Sehgröße y. Er erlebt sie auch in derjenigen Zahlgröße, wie sie dem Gesetz 2 entspricht. Aber statt des Hyperbelstücks $D\infty$ sieht er eine gerade Linie.

Das beweist zunächst, daß es Sehfernen gibt. Der Beobachter verbindet mit der Sehgröße y nicht die wahre Entfernung X zum Sehbild, sondern eine andere Entfernung: Eine Scheinentfernung, eine Sehferne x. Zugleich aber wird dadurch das Mittel gegeben, über die Sehferne x etwas auszusagen. Denn x muß derartig in das Gesetz eingehen, daß eben nicht der Hyperbelast erscheint, sondern eine gerade Linie.

8.

Die gerade Linie erscheint gegenüber der Richtung $D\infty$ nach links verdreht. Sie schneidet also die Richtung $C\infty$ in einem gewissen Punkte u. Dieser Punkt u ist derjenige Punkt, in den die beiden Bildgeraden cu und du der Wegkanten $C\infty$ und $D\infty$ zusammenzulaufen scheinen. Er ist der Bildpunkt der Unendlichkeit, das Seh-Unendlich, die Grenze des Sehraums. Die Strecke $cu = w$ mißt die Entfernung vom Beobachter zu dieser Grenze in Scheinmaßen des Sehraums. Würde der Sehraum z. B. (wie nach Herrn v. Sterneck[1])) in einen 10 km-Kreis zusammengeschoben erscheinen, so wäre $w = 10000$ m[2]).

9.

Der Anfangspunkt der Scheinkoordinaten x und y soll derselbe sein, wie der der wahren Koordinaten X und Y, also der Punkt $C = c$. Dann lautet die Gleichung der Geraden du

$$\frac{x}{w} + \frac{y}{B} = 1$$

oder

$$y = B \cdot \frac{w - x}{w}. \tag{3}$$

In diese Gleichung muß die Gleichung 2 übergehen, wenn man statt der wahren Entfernung X die Sehferne x einführt. Das Bindeglied ist neben der wahren Größe B die Sehgröße y: Die Sehgröße y der wahren Größe B erscheint nicht an der Stelle X, sondern an der Stelle x, zahlenmäßig muß y in beiden Gleichungen (2) und (3) dasselbe sein. So ergibt sich

$$\frac{E}{E + X} = \frac{w - x}{w} \tag{4}$$

oder

$$x = \frac{w \cdot X}{E + X} \tag{5}$$

als das gesuchte Gesetz für die Sehfernen.

10.

Der Grundzug dieses Gesetzes 5 ist folgender. In nächster Nähe sind wahre Entfernung X und Sehferne x gemeinschaftlich Null. Dann wachsen beide an, die wahre Entfernung X bis ∞, die Sehferne x bis zu dem endlichen Seh-Unendlich w.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} X' &= E + X \\ x' &= x - w, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so geht (5) über in

$$x' \cdot X' = - w \cdot E. \tag{7}$$

Das Schaubild des Zusammenhangs in einem Koordinatenkreuz X', x' ist also ein Aststück einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Asymptotenrechteck $E \cdot w$. Die Fig. 2 u. 3 zeigen die zwei Hauptfälle $w < E$ und $w > E$. Die wahren Entfernungen X rechnen jedesmal vom Punkte O, die Sehfernen x eines beliebigen Punktes X werden durch die an der Stelle X nach rechts bis zum Schnitt mit der Kurve gezogene Ordinate x bestimmt. Legt man durch O eine um 45° gegen die Kreuzachsen gerichtete Gerade, so mißt deren Ordinate nochmals die wahre Entfernung X, der Ordinatenunterschied zeigt bildlich den Unterschied zwischen wahrer Entfernung und Sehferne, anfangs 0, zuletzt ∞.

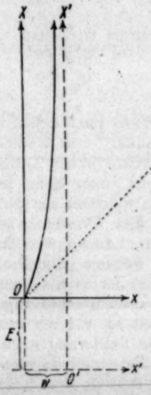

Fig. 2.

11.

Nach diesem Gesetz müssen die Sehfernen x von den wahren Entfernungen X abhängen.

Würde dies Gesetz nicht bestehen, so kämen nicht die tatsächlich gesehenen geraden Linien heraus.

Es ist zuzugeben, der Weg zu diesem Er-

1) R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Leipzig, J. A. Barth, 1907.

2) Was diese Scheinmaße eigentlich bedeuten, wird in einem späteren Aufsatz besprochen werden.

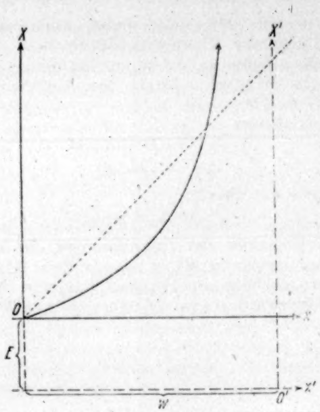

Fig. 3.

gebnis sieht etwas nach einem Schleichweg aus. Vorher Schwanken und Unbestimmtheit, jetzt plötzlich ein rechnerisches Gesetz! Kann man überhaupt sagen, man habe jetzt das Gesetz gefunden, nach welchem wir die Sehfernen wirklich erleben? Der Durchschnittsmensch erlebt, bewußtermaßen, zahlengesetzlich geordnete Sehfernen nicht; welchen Sinn hat es, ihm vorzuschreiben, dies ist dein Gesetz?

Man kann zunächst nur sagen, das Gesamtbild verhält sich so, als ob man Sehfernen erlebte und diese Sehfernen nach dem Gesetz 5 sähe. Wenn und soweit es gesetzlich geordnete Sehfernen als selbständige bewußte Erlebnisse gibt, müssen sie sich nach dem Gesetz 5 regeln.

12.

Eins läßt sich noch hinzufügen. Die Gleichung 5 enthält außer den veränderlichen Größen x und X zwei feste, E und w. Dabei ist E die Konstante des Laqueurschen Sehraums, w das Seh-Unendlich, die Sehferne x für $X = \infty$.

Ob die Konstante E für alle Menschen und Umstände genau gleich ist, haben wir noch nicht entschieden. Jedenfalls hat man Grund, zu zweifeln, ob w immer gleich sei. Wenn verschiedene Menschen verschiedene und räumlich-zeitlich schwankende Aussagen über Sehfernen machen, wird das am einfachsten in einer Verschiedenheit der Scheingrenze w zum Ausdruck kommen. Je nachdem das Seh-Unendlich w größer oder kleiner ist, ändert sich der ganze Verlauf der Zahlenwerte für die Sehfernen x.

Die unendliche Menge verschiedener Möglichkeiten für die Unendlichkeitssehferne w scheint geeignet, das große Schwanken in den Aussagen über die Sehfernen zu erklären.

13.

Aber der unendlichen Fülle erwächst eine Schranke. Wir betrachten nochmals die Schaubilder 2 und 3. Sie standen für die beiden Hauptgruppen dieser unendlich vielen Möglichkeiten, 2 für die kleinere Gruppe bis $w = E$, 3 für die größere von $w = E$ bis $w = \infty$. Man sieht unmittelbar, daß die letztere Gruppe ausscheidet.

Für $w > E$ würde es scheinbare Entfernungen geben, die größer wären als die zugehörigen wahren Entfernungen. Das zeigen schon die Schaubilder, ebenso nach Gleichung 5 der Unterschied

$$X - x = \frac{X \cdot (E - w + X)}{E + X}. \qquad (8)$$

Er ist bei positivem X nur dann dauernd positiv, wenn $E > w$ ist, andernfalls wäre er zwischen $X = 0$ und $X = w - E$ negativ.

Nun besteht darüber kein Zweifel, daß die Sehferne jeden Ortes und jeder Zeit kleiner sein muß als die wahre Entfernung. So sehr die einzelnen Angaben der Versuchspersonen schwanken, darin stimmen sie alle überein; soweit sie es überhaupt wagen, Bestimmtes anzugeben, geben sie kleinere Werte an als die wahren[1]). Daß das ganze Raumsehen auf einem Zusammenschieben des Sehraumes beruht, haben auch alle Fachschriftsteller immer als grundlegende Erfahrungstatsache hingestellt, das Gegenteil würde widersinnig erscheinen.

So bleibt von der unendlichen Menge der Möglichkeiten in der Tat nur die erste Gruppe übrig, die sich bis $w = E$ erstreckt.

14.

Hervorragend beachtet zu werden verdient der Grenzfall $w = E$ selber. Er zeigt den denkbar weitesten Sehraum, der vorkommen kann. Also den „Höchstraum", dessen Berechnung in § 3 als besonders wünschenswert bezeichnet wurde.

Das Schaubild (Fig. 4) enthält jetzt als Asymptotenrechteck das Quadrat E^2, die Gleichung 5 wird einfach

$$x = \frac{E \cdot X}{E + X}. \qquad (9)$$

Die unter 45° geneigte Gerade, welche die wahre Größe X darstellt, ist jetzt Hyperbeltangente. Die Kurve der Sehfernen schmiegt

1) Selbstverständlich sind tatsächliche Irrtümer auszuschließen, z. B. wenn man in einer künstlichen Landschaft Spielzeughäuser für ferne wirkliche Häuser hält, u. dgl.

Fig. 4.

sich anfangs an die Kurve der wahren Entfernungen an, wahre Entfernung und Sehferne sind nicht nur für $X = 0$, sondern auch in der näheren Umgebung gleich; der Unterschied $X - x$ ist anfangs von der zweiten Ordnung klein, nämlich

$$X - x = \frac{X^2}{E + X}. \qquad (10)$$

Auch in Fig. 1 erscheint jetzt an der Hyperbel die Tangente; die wirklich gesehene Scheingerade $du = Du$ berührt die gedachte Hyperbel $D\infty$ des Laqueurschen Sehraums (in Fig. 1 so gezeichnet). Die Tangente trennt auch hier die Fälle $w < E$ und $w > E$, auch hier ist leicht zu sehen, weshalb der letztere ausscheidet.

15.

Die Gleichung (9) kann noch anders geschrieben werden,

$$E \cdot x + X \cdot x = E \cdot X \qquad (11)$$

oder

$$\frac{1}{X} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{E}. \qquad (12)$$

Das ist die Linsenformel, und zwar für eine Konkavlinse von der Brennweite $-E$. Die wahre Entfernung X stellt die Gegenstandsweite dar, die Sehferne x die Bildweite. Danach kann man den Zusammenhang bequem übersehen. Während der Gegenstandspunkt von 0 bis ∞ wandert, wandert der Bildpunkt von 0 bis E. Besitzt man eine Konkavlinse von dieser Brennweite $-E$ und sieht mit dem einen Auge hindurch, mit dem anderen frei in die Landschaft, so mißt die Stelle, wo der Horizont des Linsenbildes den freien ebenen Raum des wahren Bildes trifft, die Unendlichkeitsgrenze des Sehraums. Das gesamte Linsenbild liegt mit jedem Punkte der Stelle X des Raumes auf, die dem Größenmaß der Sehferne x entspricht[1]).

Dies gilt für den Höchstsehraum, $w = E$. Für jedes andere w liegt jeder einzelne Sehpunkt x näher, und zwar, wie sich aus (9) und (5) ergibt, im Verhältnis w/E.

16.

Zuletzt heißt es auch hier, messen. Doch geht es auch mit dem Messen ähnlich wie beim Laqueurschen Größensehraum: Da wir das Gesetz haben, gestaltet sich die Messung wieder höchst einfach; wenigstens grundsätzlich. Grundsätzlich brauchen wir — die Laqueursche Konstante E als gemessen vorausgesetzt — nur eine einzige Sehferne x zu messen, dann wird die Zahl w und damit der ganze Entfernungssehraum bestimmt. Leider aber auch nur grundsätzlich. Der tatsächlichen Messung auch nur einer einzigen Sehferne stehen die Schwierigkeiten entgegen, die oben auseinandergesetzt worden sind.

17.

Sie entfallen für den Höchstsehraum $w = E$. Dieser Höchstsehraum enthält überhaupt nur eine Konstante, die Konstante E des Laqueurschen Sehraums. Ist die Laqueursche Konstante bekannt, so liegt der Höchstsehraum zahlenmäßig fest.

1) Wohlverstanden, das Linsenbild ist nicht das Sehbild, es zeigt nur den Sehraum im Verhältnis zum wahren Raum. Das tatsächliche Sehbild ist das sehräumlich erlebte Bild des freien Auges selber; das sehräumlich erlebte Linsenbild ein Bild dieses Bildes.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im Mai 1919.

(Eingegangen 20. Mai 1919.)

Kolorimetrische Untersuchungen. IV[1]).

Von Otto Meißner.

1. Der Anwendungsbereich der Farbfilter.

Wie ich bereits in einer früheren Mitteilung erwähnte, hatte Geheimrat Wilhelm Ostwald die Güte, mir sieben von ihm selbst hergestellte Farbfilter und eine etwas engere Grauskala als in der Farbfibel zuzusenden.

1) Vgl. die früheren ähnlich betitelten Aufsätze in dieser Zeitschrift.

Zum Teil hatte er den Anwendungsbereich der Filter selbst darauf geschrieben, zum andern Teil habe ich ihn bestimmt, auch die Ostwaldschen Angaben nachgeprüft, wobei ich z. T. bis zu 5 c verschiedene Grenzen erhielt, meist, aber nicht immer, im Sinne der Verengerung des Anwendungsbereichs. Die Prüfung geschah sehr einfach in der Weise, daß ich mir durch das zu prüfende Farbfilter den in der „Farbenfibel" sich findenden Farbenkreis betrachtete. Dabei ergibt sich folgendes: Eine Anzahl Farben sieht gleichmäßig hell, eine annähernd komplementäre (d. h. um 50 c verschiedene), gleichmäßig dunkel aus. Für jene Farbenreihe dient das Filter als „Durchlaßfilter" (+). Betrachtet man eine Farbe dieser Reihe durch das Filter, und hat sie nach der Grauleiter die Helligkeit h (in Prozenten), so ist der Schwarzgehalt s der Farbe

$$s = 100 - h.$$

Für das andere Gebiet wird das Farbfilter als „Sperrfilter" benutzt. Hat eine Farbe dieses Gebiets die Helligkeit w, so ist w direkt ihr Weißgehalt. (Die Reinheit $r = 100 - w - s$.)

Alles Menschenwerk ist unvollkommen, und so ist es unvermeidlich, daß sehr reine Farben, namentlich rote bei Verwendung der grünen Sperrfilter 5, 6 und 1, doch nicht ganz farblos erscheinen, wenigstens für mein Auge. Hierdurch wird natürlich die Bestimmung des Grau(Schwarz- und Weiß-)gehaltes einigermaßen erschwert und verunsichert. Doch ist daran nichts zu ändern.

Ich fand folgende Anwendungsgebiete der Farbfilter:

Filter Nr.	+-Durchlaßfilter	—-Sperrfilter
1	90 . . . 15	35 . . . 70
2	00 . . . 30	50 . . . 90
3	00 . . . 45	55 . . . 85
4	50 . . . 70	90 . . . 15
4b	35 . . . 70	90 . . . 20
5	60 . . . 00	15 . . . 45
6	75 . . . 05	20 . . . 55

Bei den grünen Filtern 1, 5, 6 erscheint mir das Grau der Skala infolge des bekannten Kontrastes rötlich! Bei den andern vier Filtern habe ich mit meinen Augen, oder vielmehr dem stets benutzten, etwas besseren rechten, nichts von einer Komplementärfärbung erkennen können.

Auf die umgekehrte Frage: Welche Filter gehören als Paß- oder Sperrfilter zu einer vorgelegten c, gibt die nachstehende, von 5 zu 5-Einheiten (c) des 100 teiligen Farbkreises fortschreitende Tabelle I Auskunft; Fig. 1 stellt dasselbe graphisch dar; ein langer Strich „bedeutet: Anwendungsbereich als Paßfilter, ein durchbrochenes (— — —) Anwendungsgebiet als Sperrfilter.

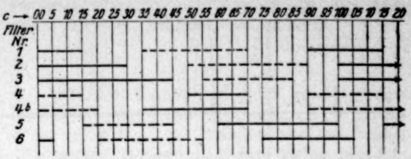

Tabelle I.

c	Durchlaßfilter +	Sperrfilter —
00—05	1 2 3 6	4 4b
05—10	1 2 3	4 4b
10—15	1 2 3	4 4b
15—20	2 3	4b 5
20—25	2 3	5 6
25—30	2 3	5 6
30—35	3	1 5 6
35—40	3 4b	1 5 6
40—45	3 4b	1 5 6
45—50	4b	1 6
50—55	4 4b	1 2 6
55—60	4 4b	1 2 3
60—65	4 4b 5	1 2 3
65—70	4 4b 5	1 2 3
70—75	5	2 3
75—80	5 6	2 3
80—85	5 6	2
85—90	5 6	2 4
90—95	1 5 6	4 4b
95—00	1 5 6	4 4b

Wie man sieht, sind fast immer für eine bestimmte Farbe 2, ja drei Farbfilter benutzbar, was natürlich eine willkommene Kontrolle bietet.

2. Weitere Untersuchungen über das Ausbleichen im Tageslicht.

Die bereits in der vorigen Mitteilung beschriebenen Papierstückchen setzte ich vom 20. III. 1919 ab abermals 30 Tage lang dem Tageslicht aus und bestimmte die Fortschritte des Ausbleichens. Die Ergebnisse der Messungen finden sich in Tabelle II; U = unbelichtet, B_1 = nach 24 tägiger, B_2 = nach 54 tägiger Belichtung.

Für die Löschblattstückchen III—VII erhält man im Mittel:

	c	w
$B_1 - U$	$-0{,}3 \pm 0{,}6$	$+12{,}6 \pm 3{,}1$
$B_2 - B_1$	$+0{,}1 \pm 2{,}9$	$+\ 8{,}4 \pm 1{,}5$

s	r	g
$+13{,}3 \pm 3{,}5$	$-25{,}9 \pm 4{,}8$	$+2{,}0 \pm 8{,}7$
$-\ 0{,}0 \pm 2{,}1$	$-\ 8{,}4 \pm 2{,}5$	$+4{,}5 \pm 1{,}8$

(g bedeutet den Weißgehalt des Graus:

$$g = \frac{100\,w}{w + s},$$

Tabelle II.

Nr.		c	w	s	r	g
I.	U	53,7 ± 0,3	07,0 ± 0,8	74,2 ± 1,5	18,8 ± 1,7	8,6
	B_1	53,0 0,0	17,7 2,1	69,8 4,0	12,5 4,5	20,3
	B_2	53,0 0,5	26,7 1,1	67,0 2,9	06,3 3,2	35,2
II.	U	14,0 0,0	04,8 0,5	93,0 0,8	02,3 0,9	4,8
	B_1	14,8 0,3	08,5 0,8	86,8 1,0	04,7 1,4	8,9
	B_2	14,0 1,0	10,0 1,2	86,7 1,6	03,3 2,0	10,3
III.	U	00,7 0,3	45,0 3,4	18,7 3,1	36,7 4,1	71,0
	B_1	00,8 0,2	54,2 2,6	23,3 3,3	22,5 4,2	70,2
	B_2	00,7 0,7	57,0 2,0	26,3 1,5	16,7 2,6	68,4
IV.	U	11,0 0,7	31,7 2,6	31,7 1,7	36,6 3,1	50,0
	B_1	10,5 0,3	36,7 2,1	38,3 1,1	25,0 2,3	49,3
	B_2	09,7 1,7	45,3 2,7	32,5 1,7	22,2 3,2	58,3
V.	U	31,0 0,7	41,2 1,5	25,5 1,4	33,3 2,0	62,8
	B_1	30,5 0,3	42,5 2,1	38,5 1,1	19,0 2,4	52,6
	B_2	30,7 1,5	52,7 1,9	36,2 2,0	11,1 2,8	59,4
VI.	U	54,3 0,4	15,2 0,6	23,3 2,5	61,5 2,6	39,3
	B_1	54,0 0,0	36,7 2,5	44,2 3,3	19,1 4,1	45,8
	B_2	(57,0 5,0)	48,8 0,8	50,0 0,0	01,2 0,8	49,5
VII.	U	84,7 0,3	10,7 0,4	28,7 3,2	60,6 3,2	27,5
	B_1	84,5 0,3	36,7 2,8	49,8 3,8	13,5 4,5	42,7
	B_2	(82,5 2,5)	45,0 1,3	49,2 2,0	05,8 2,4	47,8

d. h. auch g ist in Prozenten angegeben, wie w, s und r). Die ursprüngliche Reinheit der fünf Löschblattfarben 45,7 ist auf 19,8 nach der ersten, auf 11,4 nach der zweiten Belichtung herabgegangen. Will man bereits aus diesem Material eine exponentielle Abhängigkeit der Reinheit von der Belichtungszeit ableiten, etwa $r = r_0 e^{-ct}$, so ergibt sich nach Ausgleichung ($r_0 = 43{,}6$ und) c etwa $= \frac{0{,}01}{M}$, wo M den „Modul" der natürlichen Logarithmen bedeutet, t ist in Tagen, r in Prozenten angegeben zu denken. Man findet, daß die Reinheit der Löschblattfarben etwa binnen Monatsfrist in Licht auf die Hälfte herabsinkt; es ist dieser Zeitraum sozusagen ihre „Halbwertszeit". Nach einem halben Jahr ist die Reinheit auf 1 Proz., praktisch also so gut wie auf 0, herabgesunken. Doch sind zu einer exakteren Bestimmung von c natürlich noch mehr Beobachtungsreihen nötig. Vielleicht regen diese Zeilen andere an, sich ebenfalls damit, und vielleicht mit besseren Hilfsmitteln, zu befassen.

Im einzelnen ist bemerkenswert die starke Aufhellung („Vergrauung") der blaugrünen Farben (I, VI, VII) sowie die starke Reinheitsabnahme der anfangs relativ sehr reinen, daher „schön"[1]) aussehenden grünen und blauen Löschblätter; die Reinheit der gelbroten ist viel schwächer gesunken. Gleichwohl habe ich vorderhand aus beiden Sorten die Mittel (s. o.) gebildet.

1) Im Russischen bedeutet прекрасъ (prekras) schön eigentlich: sehr rot! — Insbesondere machen „dunkelklare" Farben ($w \sim 0$) einen „schönen" Eindruck; großer Schwarzgehalt läßt sie nur „gesättigt", nur gelbe (grüngelbe ca. 95 — orange ca. 20) anders, nämlich „braun", erscheinen.

Tabelle III.

Färbung junger Laubblätter.

Baumart	c	w	s	r
1. Buche, Fagus silvatica	93,6 ± 1,0	14,0 ± 5,7	45,0 ± 7,1	41,7 ± 9,1
2. Eiche, Quercus sessiliflora	93,3 ± 1,0	15,8 ± 6,5	66,0 ± 7,8	18,2 ± 9,5
3. Linde, Tilia sp. sp.	93,3 ± 3,1	13,7 ± 3,2	56,0 ± 11,6	30,3 ± 12,0
4. Rüster, Ulmus sp.	93,8 ± 0,4	16,4 ± 5,1	62,6 ± 11,4	21,0 ± 12,2
5. Pappel, Populus alba	93,0	6,0	70,0	24,0
6. Birke, Betula sp.	90,0 ± 1,0	9,0 ± 1,0	78,5 ± 5,5	12,5 ± 5,6
7. Flieder, Syringa v.	90,7 ± 1,2	6,7 ± 2,7	82,3 ± 8,2	11,0 ± 8,7
8. Eberesche, Sorbus auc.	88,2 ± 1,9	10,0 ± 8,7	78,8 ± 4,8	11,2 ± 10,0
9. Spiraee	87,5 ± 2,5	8,5 ± 2,5	70,0 ± 5,0	21,5 ± 5,6

3. Die Blattfärbung im Herbst und Frühling.

Wie im Herbst die längst voll ausgefärbten, habe ich in diesem Frühjahr eine große Anzahl etwa halb ausgewachsener junger Laubblätter kolorimetrisch untersucht; durch Anthokyan rotgefärbte Jungblätter sind in der Zusammenstellung (Tabelle III, S. 445) nicht enthalten[1]).

Für die Blätter von 1—5 ergeben sich folgende Differenzen im Sinne Herbstfarbe—Frühlingsfarbe:

Diff. H.—F.	c	w	s	r	g
1.	—4	—10	+45	—35	—20
2.	—4	— 7	+19	—12	—10
3.	—5	—10	+33	—23	—16
4.	—6	— 8	+25	—17	—11
5.	—8	0	+20	—20	— 2
Mittel:	**—5,4**	**—7,0**	**+28,4**	**—21,4**	**—11,8**
	±0,8	±1,8	±4,9	±3,9	±2,9

Die Mittelwerte selbst sind für die bezeichneten Baumarten im Frühling:

$c = 93{,}4 \pm 0{,}1$, $w = 13{,}2 \pm 1{,}8$,
$s = 59{,}9 \pm 4{,}2$, $r = 26{,}9 \pm 4{,}2$.

Diese Baumarten sind hier die vorherrschenden. Die Reinheit sinkt also im Laufe des Sommers auf weniger als ein Viertel ihres Anfangsbetrags, der Weißgehalt nimmt auf die Hälfte ab, der Schwarzgehalt um die Hälfte zu, die Farbe verschiebt sich um 5 c nach dem Blau (Grün) hin. Aber auch der Endwert 88 ist noch gelbgrün, was ja auch das griech. χλωρός bedeutet. („Reines" Grün, ca. 80 c—75 ist schon etwas bläulich — wird vulgär als „giftgrün", d. h. Schweinfurter Grün, bezeichnet. Ich habe diese Farbe noch nicht untersucht.)

1) Für rote junge Pappeln und Eichblätter fand ich $c = 10$, $w = 11$, $s = 83$, also $r = 6$, d. h. viel kleiner als bei den grünen. Das rührt wohl daher, daß das rotblaue Anthokyan das gelbgrüne Chlorophyll fast neutralisiert; dies bedingt auch wohl den großen Schwarzgehalt dieser Blätter. Übrigens ist die Untersuchung der starken Spiegelwirkung gerade dieser Blätter halber sehr schwierig und unsicher.

Potsdam, 19. Mai 1919.

(Eingegangen 26. Mai 1919.)

Notiz über eine besondere Klasse von Determinanten und ihre Anwendung bei Stabilitätsstudien an Atommodellen.

Von Harry Schmidt.

Untersucht man die Stabilität der Elektronenringe des Thomsonschen Atommodells in der Ebene ihrer Gleichgewichtslage mit Hilfe der Schwingungsmethode, so fordert dieses Stabilitätskriterium[1]) die Realität sämtlicher Frequenzen q, die sich als Wurzeln der beiden folgenden Gruppen von je n Schwingungsgleichungen berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
&(A_0 - mq^2)\,\varrho_1 + A_1\varrho_2 + A_2\varrho_3 + \cdots + A_{n-1}\varrho_n \\
&- 2\,m\,a\,\omega\,i\,q\,\Phi_1 + a\,B_1\,\Phi_2 + a\,B_2\,\Phi_3 + \cdots = 0 \\
&(A_0 - mq^2)\,\varrho_2 + A_1\varrho_3 + A_2\varrho_4 + \cdots \\
&- 2\,m\,a\,\omega\,i\,q\,\Phi_2 + a\,B_1\,\Phi_3 + a\,B_2\,\Phi_4 + \cdots = 0 \\
&— — — — — — — — — — — — — — \\
&(A_0 - mq^2)\,\varrho_n + A_1\varrho_1 + A_2\varrho_2 + \cdots \\
&- 2\,m\,a\,\omega\,i\,q\,\Phi_n + a\,B_1\,\Phi_1 + a\,B_2\,\Phi_2 + \cdots = 0
\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

und

$$\begin{aligned}
&2\,i\,m\,\omega q\frac{\varrho_1}{a} - B_1\frac{\varrho_2}{a} - B_2\frac{\varrho_3}{a} - \cdots \\
&+ (C_0 - m\,q^2)\,\Phi_1 - C_1\,\Phi_2 - C_2\,\Phi_3 - \cdots = 0 \\
&2\,i\,m\,\omega q\frac{\varrho_2}{a} - B_1\frac{\varrho_3}{a} - B_2\frac{\varrho_4}{a} - \cdots \\
&+ (C_0 - m\,q^2)\,\Phi_2 - C_1\,\Phi_3 - C_2\,\Phi_4 - \cdots = 0 \\
&— — — — — — — — — — — — — — \\
&2\,i\,m\,\omega q\frac{\varrho_n}{a} - B_1\frac{\varrho_1}{a} - B_2\frac{\varrho_2}{a} - \cdots \\
&+ (C_0 - mq^2)\,\Phi_n - B_1\,\Phi_1 - C_2\,\Phi_2 - \cdots = 0.
\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Größen A, B und C gewisse Konstanten[2]); m ist die Masse, ω die Winkelgeschwindigkeit eines Elektrons und a der Radius des Elektronenringes im Gleichgewichtsfall, während durch die kleinen Größen ϱ und Φ die vorgenommenen Verrückungen der einzelnen Elektronen in der Gleichgewichtsebene bestimmt werden. (I) und (II) können als $2n$ lineare, homogene Gleichungen mit den $2n$ Unbekannten ϱ und Φ, welche im allgemeinen nicht sämtlich gleich null sind, aufgefaßt werden. Damit daher diese Gleichungen nebeneinander bestehen können, muß die Determinante Δ ihrer Koeffizienten verschwinden. Diese Determinante läßt sich leicht als Spezialfall ($m = 2$) einer allgemeineren Determinante R von der Ordnung $m \cdot n$ auffassen, welche die folgende Beschaffenheit besitzt. Ihr Matrix setzt sich aus m^2 quadratischen Matrizen zusammen:

$$\begin{array}{l}
a_1\, b_1\, c_1 \cdots\cdots p_1 \\
a_2\, b_2\, c_2 \cdots\cdots p_2 \\
a_3\, b_3\, c_3 \cdots\cdots p_3 \\
— — — — \\
a_m\, b_m\, c_m \cdots\cdots p_m,
\end{array}$$

wobei z. B. d_k die Matrix

1) Vgl. J. J. Thomson, Phil. Mag. 7, 241, 1904; ferner auch H. Schmidt, Leipziger Dissertation 1919, § 5 (im Druck befindlich).
2) Vgl. l. c.

$$\begin{matrix} d_{k1}\, d_{k2}\, d_{k3} \cdots d_{kn} \\ d_{k2}\, d_{k3}\, d_{k4} \cdots d_{k1} \\ - - - - - \\ d_{kn}\, d_{k1}\, d_{k2} \cdots d_{k(n-1)} \end{matrix}$$

bedeutet, so daß also sämtliche Teilmatrizen unserer Determinante Matrizen einer Zirkulante (zyklischen Determinante) sind[1]).

Man sieht nämlich sofort, daß

$$\Delta = R(-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \quad (1)$$

wird. Es gilt nun der folgende Lehrsatz:

Eine Determinante $m \cdot n$ ter Ordnung der vorerwähnten Art läßt sich in ein Produkt von n Determinanten m-ter Ordnung zerlegen:

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \cdot \prod_{i=1}^{n} R_i,$$

wobei

$$R_i = \begin{vmatrix} a_1(\varepsilon_i)\, b_1(\varepsilon_i)\, c_1(\varepsilon_i) \cdots p_1(\varepsilon_i) \\ a_2(\varepsilon_i)\, b_2(\varepsilon_i)\, c_2(\varepsilon_i) \cdots p_2(\varepsilon_i) \\ a_3(\varepsilon_i)\, b_3(\varepsilon_i)\, c_3(\varepsilon_i) \cdots p_3(\varepsilon_i) \\ - - - - - - - - - \\ a_m(\varepsilon_i)\, b_m(\varepsilon_i)\, c_m(\varepsilon_i) \cdots p_m(\varepsilon_i) \end{vmatrix} \quad (2)$$

ist. Die Elemente der Determinanten R_i werden aus den Elementen der Teilmatrizen von R mit Hilfe von ε_i (der durch den Index i gekennzeichneten n-ten Einheitswurzel) in einer Weise zusammengesetzt, die aus dem folgenden Beispiel zu ersehen ist:

$$d_k(\varepsilon_i) = d_{k1} + \varepsilon_i d_{k2} + \varepsilon_i^2 d_{k3} + \cdots + \varepsilon_i^{n-1} d_{kn}. \quad (3)$$

Der Beweis des vorstehenden Satzes kann durch Multiplikation der Determinante R mit einer passend gewählten Hilfsdeterminante $m \cdot n$-ter Ordnung erbracht werden[2]); weit einfacher jedoch ist der folgende Weg[3]). Man kann eine Determinante R der in Rede stehenden Art als Determinante der quadratischen Form

$$F = \sum_{hkrs} [h, k, r+s]\, x_r^h\, y_s^k \quad (4)$$

auffassen, wobei r und s von 1 bis n sowie h und k von 1 bis m laufen und wobei

$$[h, k, t] = [h, k, t + \lambda n]$$

sein soll. Indem wir in Gl. (4) r durch $t = r + s$ ersetzen, erhalten wir:

$$F = \sum_{hkst} [h, k, t]\, x_{t-s}^h \cdot y_s^k, \quad (5)$$

wobei jetzt h und k von 1 bis m sowie s und t von 1 bis n laufen. Nun werde F der Transformation:

$$\begin{aligned} x_r^h &= \sum_\varrho \varepsilon^{r\varrho}\, \xi_\varrho^h \quad (\varrho = 1, 2 \cdots n) \\ y_s^k &= \sum_\sigma \varepsilon^{s\sigma}\, \eta_\sigma^k \quad (\sigma = 1, 2 \cdots n) \end{aligned} \quad (6)$$

unterworfen, wobei ε die n-te Einheitswurzel ist. Da also

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

ist, so wird

$$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{\mu s} = \begin{cases} n, & \text{falls } \mu \text{ durch } n \text{ teilbar;} \\ 0, & \text{falls } \mu \text{ nicht durch } n \text{ teilbar.} \end{cases} \quad (7)$$

Dann wird:

$$\sum_s x_{t-s}^h \cdot y_s^k = \sum_{\varrho\sigma s} \varepsilon^{\varrho(t-s)+\sigma s}\, \xi_\varrho^h \cdot \eta_\sigma^k, \quad (8)$$

oder da gemäß Gl. (7)

$$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{(\sigma-\varrho)s} = \begin{cases} n, & \text{falls } \varrho = \sigma \\ 0, & \text{falls } \varrho \neq \sigma \end{cases} \quad (9)$$

ist,

$$\sum_s x_{t-s}^h\, y_s^k = \sum_\varrho n\, \varepsilon^{\varrho t}\, \xi_\varrho^h\, \eta_\varrho^k. \quad (10)$$

Dann wird:

$$F = n \sum_{hk\varrho} (h, k, \varrho)\, \xi_\varrho^h \cdot \eta_\varrho^k, \quad (11)$$

wobei:

$$(h, k, \varrho) = \sum_t [h, k, t]\, \varepsilon^{\varrho t} \quad (12)$$

gesetzt wurde. Da nun die Determinante der transformierten Form gleich dem Produkt aus der Determinante R der ursprünglichen Form und den Transformationsdeterminanten sein muß, so wird:

$$R = n^{m \cdot n} \cdot D^{-2m} \cdot \prod_{\varrho=1}^{n} |(h, k, \varrho)|, \quad (13)$$

wenn

$$D = \left|\sum_\varrho \varepsilon^{r\varrho}\right| = \left|\sum_\sigma \varepsilon^{s\sigma}\right| \quad (14)$$

ist. Nun wird gemäß Gl. (7):

$$D^2 = \left|\sum_\varrho \varepsilon^{(r+s)\varrho}\right| = \begin{vmatrix} 0\,0\,0 \cdots 0\,n\,0 \\ 0\,0\,0 \cdots n\,0\,0 \\ - - - - - \\ 0\,n\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ n\,0\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \cdots 0\,0\,n \end{vmatrix} = n^n \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

und folglich:

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \cdot \prod_{\varrho=1}^{n} |(h, k, \varrho)|. \quad (15)$$

Da aber gemäß Gl. (2):

$$|(h, k, \varrho)| = R_i$$

ist, so wird Gl. (15):

$$R = (-1)^{\frac{m}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{i=1}^{n} R_i, \quad (16)$$

und unser Satz ist bewiesen.

1) Für $m = 1$ wird R eine einfache Zirkulante.

2) Näheres s. H. Schmidt, l. c. § 7.

3) Diesen zweiten Beweis verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Professor Herglotz-Leipzig.

Zur Anwendung auf die oben genannte Determinante Δ setzen wir zur Abkürzung (indem wir die Einheitswurzeln wieder durch ε bezeichnen):

$$\varepsilon_k A_1 + \varepsilon_k^2 A_2 + \varepsilon_k^3 A_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} A_{n-1} = L_k,$$

$$\varepsilon_k B_1 + \varepsilon_k^2 B_2 + \varepsilon_k^3 B_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} B_{n-1} = i M_k$$

und

$$\varepsilon_k C_1 + \varepsilon_k^2 C_2 + \varepsilon_k^3 C_3 + \cdots + \varepsilon_k^{n-1} C_{n-1} = N_k.$$

Dann wird gemäß Gl. (16) unter Berücksichtigung von Gl. (1):

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} A_0 - mq^2 + L_k & ai(M_k - 2m\omega q) \\ -\frac{i}{a}(M_k - 2m\omega q) & C_0 - mq^2 - N_k \end{vmatrix}.$$

Die Forderung $\Delta = 0$ führt demnach zu n Gleichungen von der Form:

$$(A_0 - mq^2 + L_k)(C_0 - mq^2 - N_k) = (M_k - 2m\omega q)^2,$$

und man erkennt leicht, daß diese Gleichungen $2n$ unabhängige Wurzeln q entsprechend den $2n$ Freiheitsgraden der n Elektronen in der Ebene ihrer ungestörten Gleichgewichtslage liefern.

Hamburg, Mai 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 3. Juni 1919.)

Gleichgewichts- und Stabilitätsstudien am Haasschen Modell des positiven Kerns der Atome.

(Vorläufige Mitteilung[1]).)

Von Harry Schmidt.

Vor einiger Zeit hat A. Haas[2]) über die Konstitution des positiven Kerns der Atome die folgenden Anschauungen entwickelt. Ist N das auf ganze Zahlen abgerundete Atomgewicht des betreffenden Elementes, so setzt sich der Atomkern (im Sinne der Bohrschen Theorie) aus N positiven Elektronen zusammen, die sich innerhalb einer Kugel von homogener negativer Elektrizität von insgesamt n Elementarladungen angeordnet befinden, wobei n derart bestimmt ist, daß $(N - n)$ gleich der Kernladungszahl des Elementes wird. Der Radius a eines positiven Elektrons berechnet sich dabei aus der Formel für die elektromagnetische Masse

$$m = \frac{2}{3c^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{a},$$

wenn m gleich der Masse eines Wasserstoffatoms und ε gleich dem elektrischen Elementarquantum gesetzt wird (c = Lichtgeschwindigkeit); er wäre daher rund 1800 mal kleiner als der Radius eines negativen Elektrons. Man bekommt demnach ein Bild des Atomkerns, wenn man das Thomsonsche Atommodell hinsichtlich des Volumens billionenmal verkleinert und in ihm nun die Rollen der positiven und der negativen Elektrizität vertauscht, außerdem aber berücksichtigt, daß die Gesamtmasse der in der negativen Kugel eingeschlossenen positiven Elektrizität nicht so groß ist wie die negative Kugelladung selbst.

Um nun für die einzelnen Elemente zu spezielleren Kernkonstitutionsbildern zu gelangen, wurde eine eingehendere Untersuchung der Möglichkeit und Stabilität von Gleichgewichtszuständen ruhender und rotierender Elektronengruppen im Thomsonschen Atombild[1]) durchgeführt. Mit der Auffindung möglicher Gleichgewichtslagen von Elektronen, die sich in Form einfacher und zwei konzentrisch ähnlicher regulärer Polygone, ferner in Form einer Doppelpyramide und eines rechtwinkligen Prismas, schließlich einfacher und zwei konzentrisch ähnlicher regulärer Polyeder innerhalb einer äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität angeordnet befinden, hat sich bereits A. Haas[2]) eingehender befaßt, während die Stabilitätsverhältnisse bei ebenen Elektronenringen von J. Thomson[3]) untersucht worden sind. Indem jenen aufgezählten Anordnungen noch die Gruppierung in Form einer einfachen Pyramide hinzugefügt wurde, dürften sämtliche Grundtypen von Elektronenkonfigurationen behandelt sein, auf welche sich die komplizierteren Formen zurückführen lassen.

Die Ermittlung möglicher Gleichgewichtszustände geschah auf Grund der Forderung, daß dann die potentielle Energie der gesamten Konfiguration ein Extremum werden muß. Man macht den Kugelmittelpunkt zum Anfang eines Koordinatensystems, stellt die potentielle Energie als Funktion der $3N$ Koordinaten der N Elektronen dar und bildet die partiellen Ableitungen, deren Verschwinden zur Berechnung der erfor-

1) Die ausführlichere Veröffentlichung erfolgt in der im Druck befindlichen Leipziger Dissertation des Verfassers: „Über die Möglichkeit und Stabilität von Gleichgewichtszuständen ruhender sowie rotierender Elektronengruppen innerhalb einer im allgemeinen nicht äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität".

2) A. Haas, diese Zeitschr. 18, 400, 1917.

1) Unter Verallgemeinerung auf nicht äquivalente Kugelladungen. Die Vertauschung von positiver und negativer Elektrizität spielt ja bei den Gleichgewichts- und Stabilitätsuntersuchungen keine Rolle.

2) A. Haas, Wiener Ber. 120, 1111, 1911.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 7, 237, 1904.

derlichen Daten führt. Wegen der symmetrischen Eigenschaften sämtlicher betrachteten Konfigurationen kann sich dabei die Untersuchung auf ein einziges Elektron beschränken.

Als Stabilitätskriterium gelangt das Lejeune-Dirichletsche zur Anwendung, das für den Fall von Stabilität das Vorhandensein eines Minimums der potentiellen Energie fordert. Die Übertragung der für ruhende Systeme streng gültigen Dirichletschen Schlußweise auf stationäre Bewegungsformen wird einer Diskussion unterworfen, und es gelangt dasjenige Verfahren zur Anwendung, das für die Stabilität das meiste verlangt, mithin bei der Unsicherheit unserer Kenntnis über die möglichen Störungen im Innern des Atomkerns die sichersten Resultate gewährleistet. Bei der Durchführung der Rechnungen wurde mit großem Nutzen Gebrauch von dem an dieser Stelle[1]) vorstehend mitgeteilten Determinantensatz gemacht. In bezug auf die Einzelheiten muß auf die ausführlichere Publikation verwiesen werden.

Die Resultate der Untersuchung lassen sich wie folgt zusammenfassen. Sämtliche oben aufgezählten Grundformen von Elektronenanordnungen liefern im allgemeinen eine große Anzahl möglicher Gleichgewichtslagen. Die Struktur der Gruppierungen ist um so sperriger, je geringer die Ladung der positiven Kugel ist, und für jede Form der Anordnung lassen sich die Mindestwerte dieser Kugelladung berechnen, welche zur Ermöglichung einer Gleichgewichtslage erforderlich sind. Wird im Mittelpunkt ein Elektron hinzugefügt, oder rotiert die Konfiguration um eine feste, durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse, so tritt im allgemeinen eine Deformation der Konfigurationen ein. Für besondere Fälle ist das Folgende zu bemerken. Bei den konzentrisch-ähnlichen regulären Polygonen nähern sich mit wachsender Elektronenzahl die beiden Ringe einander mehr und mehr, während sie sich gleichzeitig immer weiter vom Kugelmittelpunkt entfernen. Dasselbe gilt für Rotation mit wachsender Geschwindigkeit. Ebenso werden bei den rechtwinkligen Prismen mit zunehmender Elektronenzahl einerseits und wachsender Rotationsgeschwindigkeit andererseits die beiden parallelen Polygone immer größer, während sie zugleich einander immer näher rücken. Und Entsprechendes gilt schließlich auch für die Pyramiden und Doppelpyramiden, indem sie unter den genannten Umständen immer flacher und flacher werden, und ihre Grundfläche sich dabei unter ständiger Vergrößerung mehr und mehr der Peripherie der positiven Kugel nähert. Der von A. Haas[1]) aufgestellte Satz, daß bei jeder beliebigen Konfiguration sämtliche Winkel, welche die zu den verschiedenen Elektronen gezogenen Kugelradien miteinander bilden, von der Rotation völlig unbeeinflußt bleiben, bedarf demnach der Einschränkung auf ebene Konfigurationen.

Diese große Fülle der an sich möglichen Gleichgewichtslagen wird aber gewaltig reduziert, wenn man die Stabiltät der Gleichgewichtszustände als weitere Forderung hinzutreten läßt. Dann ergibt sich nämlich zunächst, daß sämtliche Doppelringe, rechtwinklige Prismen und Doppelpolyeder ausscheiden müssen. Von den regulären Polyedern stellen nur das Tetraeder und das Oktaeder, von den ebenen Ringen nur einige wenige Spezialfälle stabile Anordnungen dar. Ferner liefern die Pyramiden und Doppelpyramiden einige Beispiele stabiler Anordnungen, und man kann daher zusammenfassend sagen, daß, falls überhaupt die Möglichkeit stabiler Anordnungen von größeren Elektronenzahlen im Sinne der Haasschen Kerntheorie besteht, dieses nur in Form mehrfacher ebener Ringe von verschiedenen Elektronenzahlen oder aber von solchen räumlichen Anordnungen in Frage kommen kann, bei denen sich mehrere einfache Ringe von verschiedenen Elektronenzahlen in parallelen Ebenen symmetrisch um eine durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse angeordnet befinden.

Wie erwähnt, sind derartige Anordnungen zum Teil bereits von J. J. Thomson[2]) näherungsweise untersucht worden. Nun stehen aber in zahlreichen Fällen, worauf schon A. Haas[3]) aufmerksam gemacht hat, die Thomsonschen Resultate mit der ersten Grundbedingung für jede Gleichgewichtslage im Widerspruch, mit der Bedingung nämlich, daß die Resultierende der Abstoßungskräfte, die auf jedes einzelne Elektron von allen übrigen ausgeübt werden, genau die entgegengesetzte Richtung haben muß, wie die radial zum Mittelpunkt wirkende Anziehungskraft, die auf das betrachtete Elektron von der positiven Elektrizität ausgeübt wird. Es bleibt dabei fraglich, ob stabile Gleichgewichtslagen von so hohen Elektronenzahlen, wie sie von Thomson angegeben worden sind, überhaupt möglich sind; jedenfalls aber erscheint es angebracht, jene Anordnungen erneut zu untersuchen, und wir behalten uns vor, diese Untersuchung auf Grund der hiermit gelieferten Vor-

1) H. Schmidt, diese Zeitschr. **20**, 446, 1919.

1) Vgl. A. Haas, Wiener Ber. **120**, 1169, 1911.
2) J. J. Thomson, l. c.
3) A. Haas, Wiener Ber. **120**, 1113, 1911.

arbeiten demnächst auszuführen. Ihre Ergebnisse werden uns dann die Möglichkeit bieten, die Haasschen Grundvorstellungen durch speziellere Bilder zu erweitern und ihre Brauchbarkeit an den physikalischen Folgerungen zu prüfen, die sich aus ihnen werden ableiten lassen.

Hamburg, Anfang Juni 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 4. Juni 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

Die experimentelle Methodik.

§ 8. Nachdem H. F. Weber[1]) die starke Temperaturabhängigkeit der unternormalen Atomwärmen festgestellt, J. Dewar[2]) die Allgemeinheit des Phänomens wahrscheinlich gemacht hatte, waren auch von experimenteller Seite her die beiden Forderungen gegeben: a) zu möglichst tiefer Temperatur vordringen, b) das Intervall, welches praktisch das „∂T“ in Gleichung (1) bildet, möglichst einengen, damit man behaupten kann, wahre, nicht mittlere, Atomwärmenwerte zu messen. Eine präzise Methode, die das leistet, wurde zuerst von Eucken[3]), Nernst[4]) und einem Stab von Mitarbeitern ausgebildet. Ihnen verdankt man den weitaus größten Teil des heute zur Verfügung stehenden, nach Kriterium b) brauchbaren[5]) Beobachtungsmaterials. Eine Reihe sehr peinlicher und engmaschiger Präzisionsmessungen, von W. H. Keesom und H. Kamerlingh-Onnes[6]) wesentlich nach derselben Methode ausgeführt, bildet die wertvollste Ergänzung.

Fig. 3 zeigt die klassisch einfachste Ausführung. Der Kalorimeterblock K ist an zwei dünnen Pt-Drähten in dem Glasgefäß G frei aufgehängt. G steht in einem versilberten Dewar-Gefäß (nicht gezeichnet), mit flüssiger Luft oder H_2, dessen normaler Siedepunkt (ca. 20° K), wenn nötig, durch Absaugen der Dämpfe noch herabgedrückt wird. Nachdem G und K die Temperatur des Bades angenommen, wird G auf äußerstes Hochvakuum entleert (Molekular-

Fig. 3.

pumpe; im Vakuum rotgeglühte, dann im flüssigen Luft- oder H_2-Bad gekühlte Kokosnußkohle). Dieses Hochvakuum bildet den vitalsten Teil der Anordnung, da es bei tiefer Temperatur (geringe Strahlung!) und geringer Temperaturdifferenz zwischen G und K (sie erreicht höchstens wenige Grade) fast absolute Wärmeisolation garantiert.

K besteht für einen guten Leiter (Fig. 4,

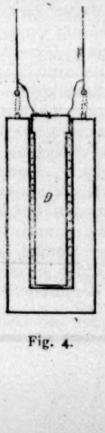

Fig. 4.

1) H. F. Weber, Pogg. Ann. **154**, 367, 553, 1875.

2) J. Dewar, Proc. Roy. Inst. March 25, 1904; Proc. Roy. Soc. (A) **76**, 325, 1905.

3) A. Eucken, diese Zeitschr. **10**, 586, 1909.

4) W. Nernst, Ann. d. Phys. (4) **36**, 395, 1911. S. a. Literatur zur Tab. II.

5) Aus mittleren Atomwärmen lassen sich nie präzise Schlüsse ziehen. Wir werden sie im folgenden nur zur Ergänzung benutzen und nur solche Stoffe erwähnen, für welche zum mindesten auch einige wahre C_v gemessen sind.

6) Siehe Lit. zu Tab. II.

doppelter Maßstab) einfach nur aus einem — zweiteiligen — Block des zu untersuchenden Metalls selbst. Um den Dorn D ist elektrisch isoliert ein Pt-Draht von 80—100 Ω Widerstand geführt, der Zwischenraum mit Paraffin ausgegossen, der Dorn im äußeren Blockteil festgeschlagen. — Der Pt-Draht dient zur elektrischen Heizung und als Widerstandsthermometer. Nach Durchkältung und Evakuation von G und etwa $^1/_2$-stündiger Verfolgung des meist verschwindend kleinen „Ganges", wird etwa 1 Minute lang ein Heizstrom (Größenordnung $^1/_{10}$ A) durch den Draht gesandt, dabei der Anstieg und wieder etwa $^1/_2$ Stunde lang der Gang des Pt-Widerstands beobachtet. Wenn der Temperaturkoeffizient des letzteren als Funktion der Temperatur bekannt ist, wird C_p in bekannter Weise (und unter Anbringung naheliegender Korrektionen) gefunden.

Der Anschluß des Pt-Thermometers an thermodynamisch festgelegte Fixpunkte bildet natürlich einen integrierenden Bestandteil aller solchen Untersuchungen. Er erfolgte an die Siedepunkte von CO_2, O_2, H_2 und an Widerstandskurven anderer Pt-Sorten und von Blei, die in Leiden mit Gas- und Dampfspannungsthermometern ermittelt waren. Auch wurden gasthermometrische Methoden unmittelbar zur Kontrolle herangezogen[1]). —

Für schlechter leitende Körper besteht K aus einem dünnwandigen Silber- oder (besser) Kupfergefäß, das sie aufnimmt und zur Erhaltung des Wärmekontakts mit Wasserstoff gefüllt bleibt, daher gasdicht verlötet sein muß. Der Widerstandsdraht verläuft im Innern oder auch außen herum. Eine neuere Form von K zeigt Fig. 5.

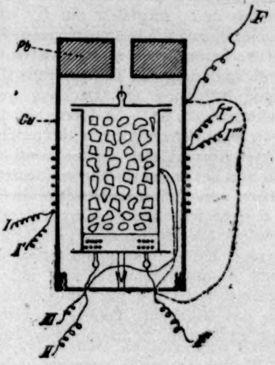

Fig. 5.

1) Vgl. bes. Lindemann u. Schwers, diese Zeitschr. 14, 766, 1913.

Hier ist das eigentliche Kalorimetergefäß zum Schutz gegen Strahlungsaustausch mit G noch von einem Kupfermantel Cu umgeben, der mit einem Bleiblock Pb thermisch beschwert ist. Die Temperatur des letzteren Systems mißt das Widerstandsthermometer I-I'-I''-I''', die Temperaturdifferenz zwischen ihm und dem eigentlichen Kalorimeter das Thermoelement III-III'. II-II' ist die Heizung. —

Zwei Umstände sind ausschlaggebend für den Erfolg dieser Methoden: a) daß die Wärmeleitfähigkeit der Metalle (und Kristalle überhaupt) bei tiefer Temperatur nicht, wie gelegentlich vermutet wurde, sehr klein, sondern sehr groß wird[1]); b) die starke Abnahme der Atomwärmen selbst. Das durch beide Umstände enorm gesteigerte Temperaturleitvermögen, ferner das bekannte Verhalten der Strahlungseffekte (rohproportional mit T^4) und die absolute Wärmeisolation des Hochvakuums lassen die ganze Anordnung, je tiefer die Temperatur sinkt, mit zusehends gesteigerter Präzision funktionieren.

Prüfung der „monochromatischen" Theorie. „Thermisch einfache" Stoffe.

§ 9. Schon die rohen Beobachtungswerte für die Atomwärmen bei konstantem Druck (C_p), die nach diesen Methoden, in einigen Fällen bis hinab zu 14° K gemessen wurden, zeigen auf den ersten Blick eine schlagende allgemeine Übereinstimmung mit dem von Einstein (s. o. Gl. (22)) und Nernst (s. o. § 6) vorhergesehenen Verlauf. Für eine quantitative Prüfung von (22) muß natürlich wieder die Korrektion (4) in Betracht gezogen werden.

Da die nötigen Daten: Ausdehnungskoeffizient α, Kompressibilität $\varkappa$ und Atomvolumen V in der Regel höchstens für Zimmertemperatur bekannt sind, ist es wichtig zu bemerken, daß die Korrektion, die bei Zimmertemperatur meist einige Prozent beträgt (etwa 3—6 Proz., im einzelnen Ausnahmefällen 10—15 Proz.), auch prozentuell betrachtet, mit einer höheren als der ersten Potenz der Temperatur abnimmt und bei jenen Temperaturen, bei denen gerade das charakteristische Gepräge des C_v-Verlaufs hervortritt, meist schon auf verschwindend kleine Beträge gesunken ist. Man darf darum nach Nernst[2]) und auf Grund der Messungen Grüneisens[3]), von der (auch oder vielmehr gerade bei den tiefsten Temperaturen) sehr geringen Variabi-

1) Vgl. A. Eucken, Ann. d. Phys. (4) **34**, 185, 1911.
2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 817, 1911; Ann. d. Phys. (4) **36**, 425, 1911.
3) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4), **26**, 401, 1908; **33**, 65, 1910.

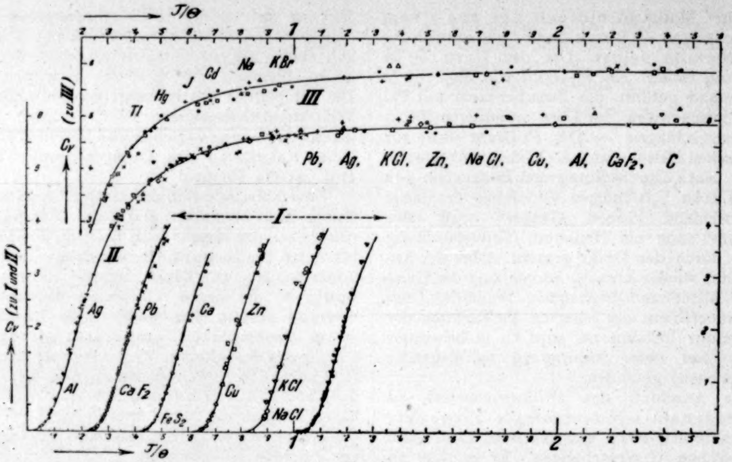

Fig. 6.

lität von $\varkappa$ und V ganz absehen. Für α wäre das keineswegs gestattet, da es nach einer — in den meisten untersuchten Fällen gut bestätigten — Beziehung von Grüneisen[1]) gerade mit C_p selbst proportional ist. Ebendies ermöglicht, das Korrektionsglied in der Form anzusetzen

$$C_p - C_v = A' C_p^2 T \qquad (24)$$

und die Materialkonstante A' aus einem zusammengehörigen Wertesystem von α, V, $\varkappa$, C_p durch Gleichsetzen von (4) und (24) zu bestimmen.

Nach Nernst soll sich außerdem A' von Körper zu Körper wie die reziproke Schmelztemperatur ändern. Es handelt sich dabei sicher nicht um ein exaktes Gesetz[2]), doch liefert

$$A' = \frac{0{,}0214 \text{ cal}^{-1}}{T_s} \qquad (25)$$

mit (24) in der Tat meist so brauchbare Werte (s. Tab. I), daß man der Versuchung nicht widerstehen kann, C_p-Messungen, für deren Reduktion sonst jeder Anhaltspunkt fehlt, auf diese Weise einer theoretischen Diskussion zugänglicher zu machen[3]). —

Tabelle I.

		Al	Cu	Ag	Pb	Pt	NaCl	KCl
$\frac{C_p}{C_v}$	thermodynamisch (Gl. 4)	1,042	1,025	1,047	1,055	1,019	1,051	1,038
	nach (24) u. (25)	1,040	1,027	1,032	1,068	1,019	1,036	1,039

Soll nun den Überlegungen, die zu der Beziehung (22) geführt haben überhaupt irgendwelche allgemeinere Bedeutung zukommen, so wird sich aus dem, sorgfältig auf C_v korrigierten, Beobachtungsmaterial wenigstens eine Klasse von Stoffen hervorheben müssen, deren C_v-Verläufe durch Änderung des Temperaturmaßstabes mit einiger Näherung zur Deckung gebracht werden können (s. o. § 7). Und wenn das zutrifft, so sind wir wohl berechtigt, das thermische Verhalten dieser Körperklasse als besonders einfach anzusehen und bei unseren weiteren theoretischen Erörterungen zum Führer zu nehmen. In Tab. II und Fig. 6 habe ich alle jene Körper zusammengestellt, welche bis jetzt ein derart einfaches Verhalten gezeigt haben. Die gemessenen (auf C_v reduzierten) Atomwärmenwerte sind auf einer Kurve gesammelt (II i. d. Fig.), nur mußte dieselbe, um das ungeheure Beobachtungsmaterial aufnehmen zu können, in ihrem ersten Teil noch

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4), 33, 65, 1910; 39, 257, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 426 u. 491, 1911. — S. a. S. Ratnowsky, Ann. d. Phys. (4) 38, 637, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 75, 1913.

2) S. W. H. Keesom und Kamerlingh-Onnes, Proc. Amst. 18, 1253, 1916.

3) Einer noch mehr vereinfachten Form des Korrektionsgliedes

$$C_p - C_v = a\, T^{5/2}$$

liegt die Auffassung zugrunde, daß sich C_p in dem Bereich, wo das Glied überhaupt in Betracht kommt, grob angenähert wie konst. $\times\, T^{3/2}$ verhält.

Tabelle II (hiezu Fig. 6).

Körper, deren C_v-Verlauf in dem in Spalte 5 angegebenen Temperaturbereich bei passender Wahl von Θ (Spalte 7) durch Formel (37^2) dargestellt wird.

1			2	3	4	5	6	7	8
Zeichen in Fig. 6			Stoff	Formel	Kristallsystem	Temperaturintervall	$C_p - C_v \times 10^5$	Θ	Neuere Literaturstellen:
I	II	III							
×	×		Blei	*Pb*	regul.	14—573	$3{,}2\, C_p^2 T$	88	Nernst 1, 2, 3, 4; Eucken und Schwers, K.-Onnes 2, Griffiths, Koref, Magnus, Schübe
		○	Thallium	*Tl*	?	23—301	$2{,}7\, C_p^2 T$	96	Nernst 7, Ewald, Koref, Russell
		□	Quecksilber	*Hg*	regul.	31—232	$21 \cdot T^{3/2}$	97	Pollitzer, Koref, K.-Onnes 1
		×	Jod	*J*	rhombisch	22—298	$10 \cdot T^{3/2}$	106	Nernst 1, 3; Günther, Koref
		+	Kadmium	*Cd*	regul.	50—380	$3{,}2\, C_p^2 T$	168	Griffiths, Ewald
		△	Natrium	*Na*	regul. / quadr.	50—240[1])	$3{,}8\, C_p^2 T$	172	Griffiths, Koref
		●	Bromkali	*KBr*	regul.	79—417	$2{,}7\, C_p^2 T$	177	Nernst 1, 2; Koref, Magnus
	●		Silber	*Ag*	regul.	35—873	$2{,}5\, C_p^2 T$	215	Nernst 1, 2, 3, 6; Griffiths, Koref, Magnus, Rolla, Schübel
○			Kalzium	*Ca*	?	22—62[2])	0	226	Günther
▽	▽		Sylvin	*KCl*	regul.	23—550	$2{,}0\, C_p^2 T$	230	Nernst 1, 2, 4, 6; Koref, Magnus, Russell
□	□		Zink	*Zn*	rhomb. / hexag.	33—673	$2{,}6\, C_p^2 T$	235	Nernst 1, 4; Griffiths, Pollitzer, Magnus, Schübel, Lindemann
◇	◇		Steinsalz	*NaCl*	regul.	25—664	$2{,}7\, C_p^2 T$	281	Nernst 1, 2, 6; Koref, Magnus, Russel
△	△		Kupfer	*Cu*	regul.	14—773[1])	$1{,}3\, C_p^2 T$	315	Nernst 1, 2, 4, 6; K.-Onnes 2, 3; Griffiths, Rolla, Koref, Magnus, Schübel, Lindemann
	+		Aluminium	*Al*	regul.	19—773	$2{,}2\, C_p^2 T$	398	Nernst 1, 2, 4, 6, 7; Griffiths, Koref, Magnus, Schübel
○			Eisen	*Fe*	regul.	32—95[1])	0	453	Günther, Griffiths, Ewald, Schübel
○	○		Flußspat	*CaF₂*	regul.	17—328	$A' C_p^2 T$[3])	474	Eucken u. Schwers, Koref
+			Pyrit	*FeS₂*	regul.	22—57[1])	$A' C_p^2 T$[3])	645	Eucken u. Schwers, Ewald
▼	◢		Diamant	*C*	regul.	30—1169	$0{,}6\, C_p^2 T$	1860	Nernst 1, 2, 5, 6; Ewald, Koref, Dewar, Weber

1) *Na*, *Cu*, *Fe*, FeS_2 weichen von da an nach oben von der Kurve ab.
2) *Ca* bei höherer Temperatur fraglich.
3) Von den Verfassern thermodynamisch berechnet.

Literatur zu Tabelle II: J. Dewar, Proc. Roy. Soc. (A) **76**, 325, 1905. — A. Eucken u. F. Schwers, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 578, 1913. — R. Ewald, Ann. d. Phys. (4) **44**, 1213, 1914. — E. H. Griffiths u. Ezer Griffiths, Proc. Roy. Soc. (A) **88**, 549, 1913; **90**, 557, 1914. — P. Günther, Diss. Berlin 1916; Ann. d. Phys. (4) **51**, 828, 1916. — Koref, Berl. Ber. 1910, S. 247; Ann. d. Phys. **36**, 49, 1911. — Lindemann, Berl. Ber. 1910, S. 250. — A. Magnus, Ann. d. Phys. (4) **31**, 597, 1910; diese Zeitschr. **14**, 5, 1913. — Nernst 1: Ann. d. Phys. (4) **36**, 395, 1911; Nernst 2: N. u. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 817, 1911; Nernst 3: Berl. Ber. 1910, S. 262; Nernst 4: Berl. Ber. 1911, S. 306; Nernst 5: N. u. Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 494; Nernst 6: N. u. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1160; Nernst 7: N. u. Schwers, Berl. Ber. 1914, S. 355. — K.-Onnes 1: K.-O. u. Holst, Amst. Proc. **17**, 760, 1914 [Leiden Comm. 142c]; K.-Onnes 2: W. H Keesom u. K.-O., Amst. Proc. **17**, 894, 1915 [Leiden Comm. 143]; K.-Onnes 3: W. H. Keesom u. K.-O., Amst. Proc. **18**, 484, 1916 [Leiden Comm. 147]. — F. Pollitzer, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 5, 1911; **19**, 515, 1913; Ders., Die Berechnung chemischer Affinitäten nach dem N.schen Wärmetheorem S. 150 [Stuttgart 1912]. — L. Rolla, Cim. (6) **9**, 215, 1915. — A. S. Russel, diese Zeitschr. **13**, 59, 1912. — P. Schübel, Zeitschr. f. anorg. Chem. **87**, 81, 1914. — H. F. Weber, Pogg. Ann. **154**, 367 u. 553, 1875.

mehrmals parallel nach rechts (I), in ihrem oberen Teil noch einmal parallel aufwärts verschoben (III) zur Darstellung gebracht werden. Abszisse ist die durch einen gewissen, für jeden Körper passend gewählten Temperaturwert Θ dividierte absolute Temperatur; Θ und einige andere Angaben über die einzelnen Stoffe, das in Betracht gezogene Temperaturintervall und die Literatur ist aus der Tabelle II und den Anmerkungen zu entnehmen.

Die weitgehende allgemeine Übereinstimmung mit Einsteins Formel (22), zeigt ein Blick auf die frühere Fig. 2 (Kurve (3)), auf welcher die jetzt betrachtete „empirische" Kurve als Kurve (1) zur Darstellung gebracht ist. Ja beim Anblick der Fig. 2 könnte man vermuten, daß (1) und (3) durch eine weitere Änderung des Temperaturmaßstabes vollkommen ineinander übergeführt werden könnten; mit anderen Worten: daß die gewählten Θ-Werte noch keineswegs die zur Anpassung an die Einsteinsche Funktion günstigsten sind. Letzteres ist natür-

Tabelle III.

(C_v des Kupfers.)

Abs. Temp. T	beob. von K.-Onnes C_v	berechnet n. (22) m. $\Theta = 221{,}23$		berechnet n. (27^2) mit $\Theta = 334{,}8$		berechnet n. (27^2) mit $\Theta = 321$		berechnet n. (37^2) $\Theta = 318{,}25$	
		C_v	Diff.	C_v	Diff.	C_v	Diff.	C_v	Diff.
14,51	0,0396	0,0003	—0,0393	0,004	—0,036	0,006	—0,034	0,044	+0,004
15,59$_5$	0,0506	0,0008	—0,0498	0,008	—0,043	0,011	—0,040	0,052	+0,001
20,19$_5$	0,1155	0,0125	—0,1030	0,053	—0,062	0,066	—0,050	0,118	+0,002
29,73	0,377	0,194	—0,183	0,342	—0,035	0,403	+0,026	0,368	—0,009
40,22	0,870	0,741	—0,129	0,880	+0,100	0,99	+0,12	0,851	—0,019
50,04	1,434	(1,434)	(0,000)	(1,43)	(0,00)	1,54	+0,11	1,40	—0,03
60,33	2,08	2,13	+0,05	1,98	—0,10	2,11	+0,03	2,01	—0,07
69,66	2,58	2,73	+0,15	2,45	+0,13	2,59	+0,01	2,53	—0,05
80,32	3,04	3,05	+0,01	2,99	—0,05	3,06	+0,02	3,05	+0,01
89,38	3,42	3,66	+0,24	3,29	—0,13	3,43	+0,01	3,40	—0,02
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

lich unzweifelhaft richtig (das Motiv für die Θ-Wahl wird später klar werden) — ersteres nicht. Die Einsteinsche Funktion vermag keinem einzigen bis zu genügend kleinen Werten verfolgten Verlauf quantitativ gerecht zu werden. Sie liefert bei sehr tiefer Temperatur, wo sie sich nach (21)—(23) wie

$$3ARx^2e^{-x} = 3AR\frac{\Theta^2}{T^2}e^{-\frac{\Theta}{T}} \tag{26}$$

verhält, durchwegs viel zu kleine C_v-Werte. Als numerisches Beispiel führen wir etwa an Messungen von Kamerlingh-Onnes[1]) an Kupfer zwischen 14 und 90° K (Tab. III). Hier liefert $\Theta = 221{,}23$ in der Mitte des Intervalls (bei 50°) exakten Anschluß, bei höherer Temperatur wachsende positive, bei tieferer wachsende negative Abweichungen, welch letztere fast 100 Proz. des gemessenen Wertes erreichen! Die Kurven schneiden sich unweigerlich; eine Änderung des Temperaturmaßstabes (d. h. von Θ) könnte nur den Schnittpunkt verschieben.

Daß es sich hier nicht um einen Einzelfall, sondern um eine typische Erscheinung handelt, erkennt man leicht aus Fig. 6. Während in dem oberen Teil der Kurve Spuren eines doch mehr individuellen Verhaltens der einzelnen Stoffe durch größere Abweichungen von der gemeinsamen C_v-Kurve sich kundgeben, ist die Zusammenlegung für kleine Werte von T/Θ vollkommen gelungen: Das Gesetz der übereinstimmenden Zustände gilt gerade hier mit großer Schärfe. Der Theorie erwächst die Aufgabe, dem empirisch festgestellten, vom Einsteinschen erkennbar abweichenden Funktionsverlauf durch Änderung der Annahmen Rechnung zu tragen.

1) Siehe Literatur zu Tabelle II.

Grund des Versagens von (22). Die Nernst-Lindemannsche Formel.

§ 10. Geht man die Überlegungen des § 7, die doch in der Hauptsache zu so befriedigenden Ergebnissen geführt haben, noch einmal durch, so findet man[1]) leicht den Punkt, wo eine durchaus provisorische Annahme den allzu schroffen Abfall der Endformel (22) bei tiefer Temperatur verschuldet haben dürfte. — Auch wenn die Schwingungsweiten der Atome klein genug sind, um ihre Wechselwirkungskräfte als „quasielastisch", d. h. als lineare Funktionen ihrer Verrückungen zu behandeln, so wird doch jedes Atom nicht nach einem im Raum festen Punkt, sondern nach einem Punkt hingezogen, der von der Lage der Nachbaratome abhängt und Ortsveränderungen von derselben Größenordnung erfährt, wie das Atom selbst. Die Bewegung wird also mindestens von dem komplizierten Charakter sein etwa wie beim „Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt" und auch nicht annähernd mit einer bestimmten Frequenz ν stattfinden; dem wird man bei der Übertragung der für den einfach harmonischen Oszillator abgeleiteten Formel (14) Rechnung tragen müssen.

Nun würde tatsächlich der schroffe Abfall bei den tiefsten Temperaturen gemildert, wenn man dem Festkörper etwa den Energieinhalt eines Gemischs von Oszillatoren verschiedener Frequenzen zuschriebe. Denn für die verschiedenen, durch einheitliches ν gekennzeichneten Gruppen würde der Abfall bei verschiedenen Temperaturen stattfinden. Je tiefer die Temperatur sinkt, um so ausschließlicher würden der Energieinhalt und die Atomwärme durch die, wenn auch prozentuell nur schwach vertretenen Gruppen mit niedrigster Frequenz bestimmt

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 35, 679, 1911.

werden und darum höher bleiben, als die „monochromatischen" Formeln (21) und (22) vorhersehen lassen.

Wie aber soll man, ohne die krasseste Willkür, die prozentische Zusammensetzung des Oszillatorengemisches „dosieren"? Hat die ganze Vorstellung überhaupt noch Hand und Fuß, da der Bewegungszustand der einzelnen Atome zwar ein recht komplizierter, aber doch wohl im Mittel für alle der nämliche ist[1])?

Da ist zunächst von Interesse eine durch Einfachheit und Erfolg bestechende Dosierung, die Nernst und Lindemann[2]) vorgeschlagen haben. Denkt man sich die Hälfte der Atome mit einer Frequenz ν, die andere Hälfte mit der halben Frequenz schwingen[3]), so führt das auf

$$U = \frac{3RT}{2}\left[\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x/2}{e^{x/2} - 1}\right]; \quad x = \frac{\Theta}{T} = \frac{h\nu}{kT}$$

$$C_v = \frac{3AR}{2}\left[\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{\frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}}}{(e^{x/2} - 1)^2}\right]. \qquad (27)$$

Die C_v-Kurve ist in Fig. 2 (2) gestrichelt. Sie deckt sich mit der Kurve (1), die uns als der Ausdruck der Beobachtungen für die ausgezeichnete Körperklasse gilt, in einem weiten Temperaturbereich fast völlig, nur in den Anfangsstücken (in Fig. 2 in zehnfacher Vergrößerung wiederholt) ist der Sachverhalt qualitativ der nämliche wie früher. Tab. III, 5.—8. Spalte, zeigt den vergeblichen Versuch, die Funktion (27) den früher erwähnten Kupfer-Messungen wirklich exakt anzuschmiegen. Man müßte also offenbar, um den Tatsachen voll gerecht zu werden, Schwingungszahlen in Betracht ziehen, die noch erheblicher unterhalb des „Gros" der Atomschwingungszahlen liegen.

Das mechanische Spektrum. Näherung von Debye.

§ 11. Ungefähr gleichzeitig haben nun Debye[1]) einerseits, Born und v. Kármán[2]) anderseits folgende neue und ungemein plausible Maxime für die Übertragung der Oszillatorformel auf irgendein System, das „kleine Schwingungen" ausführt, aufgestellt, die an die bekannte rechnerische Behandlung dieses Problems anknüpft.

Hat man die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems zunächst einmal etwa in den $3N$ rechtwinkeligen Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{3N}$[3]) der N Atome angesetzt, so führe man sogenannte Normalkoordinaten ein: $u_1, u_2, \cdots u_{3N}$, das sind solche, prinzipiell immer angebbare Linearfunktionen mit konstanten Koeffizienten von $\xi_1 \cdots \xi_{3N}$, die eine Trennung der Bewegungsgleichungen nach den Variablen bewirken:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -4\pi^2 \nu_i^2 u_i; \quad i = 1, 2, 3 \cdots 3N. \qquad (28)^{4)}$$

Jeder von den $3N$ Normalkoordinaten ist dann der Energieinhalt (14) und die entsprechende Wärmekapazität und zwar mit

$$\nu = \nu_i \qquad (29)$$

zuzuschreiben.

Die Lösung von (28) ist bekanntlich für jedes u_i der Sinus (oder Kosinus) von $2\pi\nu_i t$, mit willkürlicher Amplitude und Phase (Integrationskonstanten). Geht man auf die ξ_i zurück (durch Auflösung des linearen Gleichungssystems, das zur Transformation gedient hat), so erscheinen die ξ_i als Superposition von $3N$ Sinusschwingungen mit den Frequenzen $\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_{3N}$. Hat nur ein u_i eine von Null verschiedene Amplitude, so schwingen alle Atome unisono mit der Frequenz ν_i, jedes auf einer unveränderlichen (im allgemeinen elliptischen) Bahn. Das nennt man eine Normalschwingung oder Eigenschwingung des Systems.

1) Diese Behauptung bedarf allerdings vielleicht selbst für Elemente einer Einschränkung; s. u. § 20.

2) Nernst u. Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 494.

3) Die Autoren selbst deuteten die Formel ursprünglich in anderer, übrigens ebenso unzutreffender Weise.

1) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) 39, 789, 1912. (Erste Mitt.: Arch. de Génève, März 1912.)

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. 13, 297, 1912.

3) Allgemein: In solchen Koordinaten, in denen die Differentialgleichungen linear sind.

4) $\frac{du_i}{dt}$ wird in einem konservativen mechanischen System nicht auftreten; die mit $4\pi^2\nu_i^2$ bezeichneten Systemkonstanten müssen offenbar in der Tat positiv sein, wenn die Schwingungen stabil sind.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

H. Bechhold, Die Kolloide in Biologie und Medizin. 2. Auflage. XII und 527 S. mit 69 Abbildungen und 3 Tafeln. Dresden und Leipzig, Th. Steinkopff. 1919. Preis brosch. M. 27.—, geb. M. 31.—

Daß die Erforschung der Welt des Organischen auf Grundlage der exakten Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten hervorragend fortgeschritten ist, wird schlagend erwiesen durch den Inhalt, Umfang und buchhändlerischen Erfolg, welchen drei Werke deutscher Autoren zu verzeichnen haben: des zu früh dahingeschiedenen Otto Fischer „Medizinische Physik" (besprochen diese Zeitschr. 15, 816, 1914) erschien

neulich in neuer Auflage als unveränderter Abdruck, R. Hoebers „Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe“ ist in der 4. Auflage 1914 vom anspruchslosen Bändchen zum umfangreichen Lehrbuch angewachsen, und das vorliegende, 1912 zuerst erschienene Buch erscheint jetzt in zweiter, schon vor Kriegsausbruch vorbereitet gewesener Auflage mit ganz bedeutend bereichertem Inhalt. Es soll einen ganz allgemeinen Überblick geben über die Kolloidforschung, ihre Probleme, Methoden und derzeitigen Ergebnisse auf demjenigen Gebiete, auf dem sie berufen sein wird, tiefer in die wesentlichen Vorgänge hineinzuleuchten, als es der reinen Physik der von Fischer behandelten Teilgebiete, der deskriptiven und analytischen Biochemie und selbst der physikalischen Chemie der Kristalloide gegeben sein kann. Wie der Verfasser aber selbst betont, kann jetzt nur eine Sammlung von Bruchstücken gegeben werden, zwischen denen der vortreffliche Geist der Darstellung und Scharfblick für die Wahrscheinlichkeit noch nicht erforschter Zusammenhänge vorläufig vermittelt. Dieser Scharfblick und die langjährige Erfahrung hat ihn bei der Sichtung des Materials neuer Veröffentlichungen und bei der Beurteilung streitiger Deutungen glücklich geleitet. Schon die einführenden Abschnitte über die allgemeinen Eigenschaften der Kolloide sind durch Klarheit und Verständlichkeit auch für den weiteren Kreis der Interessenten des Buches ausgezeichnet. Bei der Besprechung der Methoden wird z. T. auf technische Einzelheiten genauer eingegangen, z. B. bei der Ultrafiltration; indessen kann wohl über den Nutzen gestritten werden, da der Raum den Grad der Ausführlichkeit verbot, daß man wirklich danach arbeiten könnte. Der zweite Teil behandelt die biologisch wichtigen Kolloide, besonders die Eiweißkörper, im Anschluß daran auch ihre zukunftswichtige Rolle in der Theorie der Herstellung der Nahrungs- und Genußmittel, ferner die Ferment- und die Immunitätslehre vom Kolloidgesichtspunkt aus, beides etwas kurz. Der dritte Teil, vom Organismus als kolloidalem System, behandelt die Bedeutung der Kolloide im organischen Stoff-, Kraft- und Formwechsel und in einzelnen physiologischen Funktionen. Hier tritt die persönliche Überzeugung des Verfassers mehrfach, unter Beschränkung auf kurze Andeutung abweichender Vorstellungen, stark hervor: so bei der Betonung der Quellung und Entquellung als Grundlage organischer Beugungsvorgänge (gegenüber der Heranziehung osmotischer und Oberflächenkräfte), und bei der Rolle der Filtration bzw. Ultrafiltration für die Funktion der Niere.

Praktisch ganz außerordentlich wichtige Anwendungsgebiete der Kolloidforschung sind in einem vierten Teil zusammengestellt, so die Bedeutung der Kolloideigenschaften für Arznei- und Giftwirkung, insbesondere auch Theorie der Desinfektion, und die Bedeutung für die Vorbereitung und Färbung mikroskopischer Präparate. Hier, wie sonst, hat der Verfasser selbst hervorragendsten Anteil an der Forschung, und er hat, wie an anderen Stellen des Werkes, manches noch unveröffentlichte Ergebnis hineingeflochten.

Dem Nichtbiologen wird dieses ausgezeichnete Werk sicher nicht weniger Anregung bieten als dem Biologen und Mediziner, dem Kolloidforscher wegen der Wichtigkeit der Probleme, dem Physiker und Chemiker zur Orientierung hinsichtlich der überragenden Bedeutung, die der Phasendispersion im molekularen Mechanismus des Lebendigen zukommt.

H. Boruttau.

Personalien.

Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, er Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien Dr. Robert Strebinger für analytische Chemie.

Ernannt: Der Dozent an der Technischen Hochschule Wien Dr. Richard Suppantschitsch und der ord. Prof. an der Universität Czernowitz Dr. Josef Plemelj zu ord. Professoren der Mathematik an der Universität Laibach, Forsyth J. Wilson zum Professor für anorganische und analytische Chemie am Royal Technical College in Glasgow, der a. o. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Münster Geh. Regierungsrat Dr. Georg Kassner zum ord. Professor ebenda, der a. o. Honorarprofessor für angewandte Chemie in Industrie, Handel und Gewerbe an der Universität Frankfurt Dr. Heinrich Becker zum ord. Honorarprofessor ebenda, Dr. Harry Siedentopf von der Firma Carl Zeiß in Jena zum a. o. Professor für Mikroskopie an der Universität Jena.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Robert König zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Rostock, der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. Leonor Michaelis zum ord. Professor der physiologischen Chemie an der Universität Lund.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Richard Schachenmeier der Titel Professor.

Angebote.

Akademisch gebildeter

Physiker oder Laboratoriumsingenieur

mit Spezialausbildung auf dem Gebiete der Hochfrequenz, Gaselektrizität und Hochspannung für unser Hochspannungslaboratorium zum sofortigen Eintritt gesucht. Einige Praxis erwünscht.

Angebote mit Lichtbild, Lebenslauf und Gehaltsansprüchen an das **Personalbüro** des

Kabelwerk

der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.

Siemensstadt bei Berlin (Gartenfeld).

Junger Physiker

für das **Laboratorium eines Berliner Glühlampenwerkes** gesucht. Bewerber werden auf die Beachtung der gesetzlichen Bestimmungen über die Einstellung Auswärtiger hingewiesen. Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen, möglichst mit Lichtbild unter **S. H. 551** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.